



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ УКРАИНЫ  
КИЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

**Кафедра промышленной электроники**

**КУРС ЛЕКЦИЙ**

**ПО ПРЕДМЕТУ: «Теория электрических цепей»**

**ЧАСТЬ 3. «Трехфазные цепи. Цепи несинусоидального тока.  
Четырехполюсники. Фильтры»**  
(для иностранных студентов специальности «Электронные системы»)

**Киев 2003 г.**



## ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

Генераторы с несколькими обмотками, в которых наводятся ЭДС одинаковой частоты, но сдвинутые одна относительно другой по фазе, называют многофазными генераторами.

Совокупность электрических цепей с многофазными источниками питания называется многофазной системой электрических цепей. Отдельные ее части называются фазами.

Трехфазные цепи - это частный случай многофазных цепей, когда количество фаз равно трем.

Трехфазные цепи, фазы которых электрически не соединены между собой, называются несвязанными (в наше время не используются).

Трехфазные цепи, фазы которых электрически соединены между собой, называются связанными.

Совокупность ЭДС, напряжений или токов, которые действуют в отдельных фазах цепи, называется трехфазной системой ЭДС, напряжений, токов. Различают симметричные и несимметричные системы ЭДС, напряжений, токов.

Симметричной называется такая трехфазная система ЭДС (напряжений, токов), для которой выполняются условия:

1. Все ЭДС (напряжения, токи) равны по величине;
2. Каждая ЭДС (напряжение, ток) отстает по фазе от предыдущей ЭДС

(напряжения, тока) на один и тот же фазовый угол, равный  $\alpha = q \cdot 2\pi/3$ ,  $q = \overline{1,3}$ .

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то система ЭДС (напряжений, токов) будет несимметричной.

Пусть  $q = 1$ ,  $\alpha = 2\pi/3$ :

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \sqrt{2}E \sin(\omega t + \psi_1); & e_2(t) &= \sqrt{2}E \sin(\omega t + \psi_1 - 2\pi/3); \\ e_3(t) &= \sqrt{2}E \sin(\omega t + \psi_1 - 4\pi/3) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \psi_1 + 2\pi/3). \end{aligned}$$

Комплексные значения будут равны:

$$\dot{E}_1 = E e^{j\psi_1}; \quad \dot{E}_2 = \dot{E}_1 e^{-j2\pi/3}; \quad \dot{E}_3 = \dot{E}_1 e^{-j4\pi/3} = \dot{E}_1 e^{j2\pi/3}.$$

Комплексное число  $e^{j2\pi/3}$  называется фазным множителем и обозначается  $a = e^{j2\pi/3}$ . Модуль  $|a| = 1$ , а его фаза равна  $2\pi/3$ .

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$a^3 = e^{j2\pi} = 1; \quad a^4 = a; \quad a^5 = a^2; \quad a^6 = a^3 \quad \text{и т.д.}$$

Если изобразить векторы  $a, a^2, a^3$  на комплексной плоскости, то получим симметричную звезду, причем  $1 + a + a^2 = 0$  (рис.1).

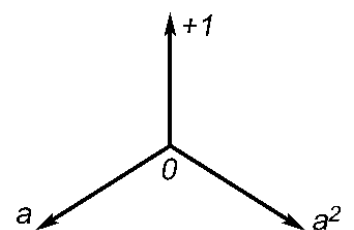


Рис.1.

Применяя фазный множитель  $a$ , трехфазную систему ЭДС можно изобразить в виде рис.2.

Для  $\psi = 0$   $\dot{E}_1 = E$ ;  $\dot{E}_2 = a^2 \dot{E}_1$ ;  $\dot{E}_3 = a \dot{E}_1$ . Тогда  $\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3 = 0$ .

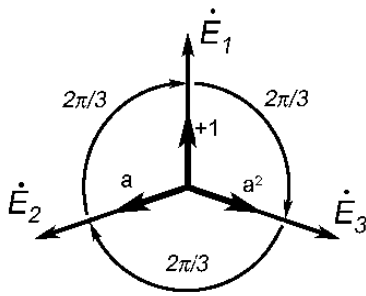


Рис.2

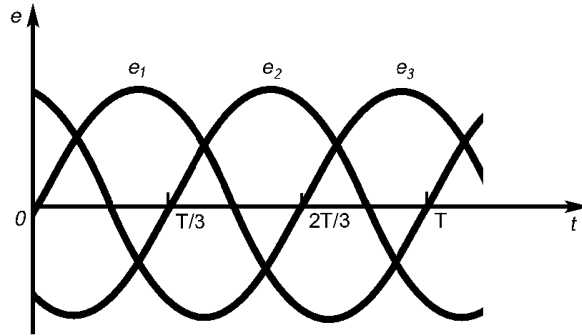


Рис.3

Такая система имеет название системы прямой (положительной) последовательности чередования фаз, поскольку ЭДС достигают своего максимального значения в соответствии с порядком нумерации (1, 2, 3) рис.3.

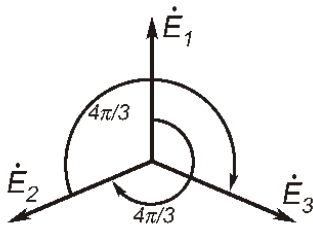


Рис.4

Если  $q = 2$ , то  $\alpha = 4\pi/3$ . Тогда:

$$\dot{E}_1 = E; \dot{E}_2 = a \dot{E}_1; \dot{E}_3 = a^2 \dot{E}_1.$$

Такая система называется системой обратной (отрицательной) последовательности фаз (рис.4). Для этой системы также выполняется равенство

$$\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3 = 0.$$

Если,  $q = 3$ ,  $\alpha = 2\pi$  то  $\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = \dot{E}_3$ . Это также симметричная трехфазная система ЭДС, которая имеет название системы нулевой последовательности фаз. Для такой системы:  $\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3 = 3\dot{E}_1$ .

Произвольную несимметричную систему можно разложить по этим трем базисным системам.

В дальнейшем под трехфазной системой ЭДС (напряжений, токов) будем понимать систему прямой последовательности фаз (если иное не оговорено).

Многофазные системы, в которых сумма мгновенных мощностей всех фаз является неизменной и не зависит от времени, имеют название уравновешенных. Многофазная система уравновешена, если она симметрична и число фаз больше двух (3, 4, 5...).

### Основные схемы соединения трехфазных цепей

Существуют различные способы соединения обмоток генератора с нагрузкой. С целью экономии обмотки трехфазного генератора объединяют в звезду или треугольник. При этом количество проводов, соединяющих генератор и нагрузку, уменьшается с шести до трех или четырех.

При соединении звездой одноименные зажимы трех обмоток объединяют в одну точку, которая называется нулевой точкой генератора. Обмотки генератора

обозначают буквами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , которые проставляют возле соответствующей фазной обмотки (рис.5).

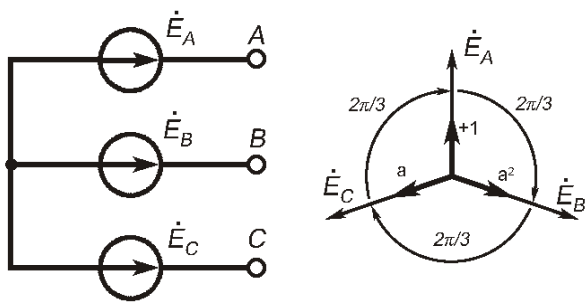


Рис.5

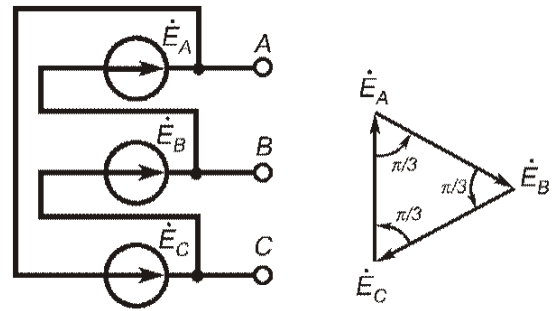


Рис.6

При соединении обмоток трехфазного генератора треугольником начало одной фазной обмотки соединяют с концом следующей по очереди фазной обмотки (рис.6). Таким образом, все три обмотки образуют замкнутый треугольник, причем направления ЭДС в контуре треугольника совпадают, а сумма ЭДС равна нулю. При отсутствии нагрузки в обмотках генератора, объединенных треугольником, ток не проходит.

Нагрузка в трехфазной цепи также может быть включена звездой или треугольником. Выделяют пять основных способов соединения трехфазного генератора с трехфазной нагрузкой:

- звезда - звезда без нулевого провода;
- звезда - звезда с нулевым проводом;
- звезда - треугольник;
- треугольник - звезда;
- треугольник - треугольник.

Провода, которые соединяют точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  генератора с нагрузкой, называют линейными проводами, а токи, которые по ним проходят, линейными токами и обозначают их  $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$ ,  $\dot{I}_C$ . За положительное направление этих токов принимают направление от генератора к нагрузке (рис.7). Напряжения между линейными проводами называют линейными напряжениями. Ветви звезды или треугольника называют фазами, а ЭДС, напряжения и токи в них называют соответственно фазными ЭДС, напряжениями и токами ( $E_\phi$ ,  $U_\phi$ ,  $I_\phi$ ).

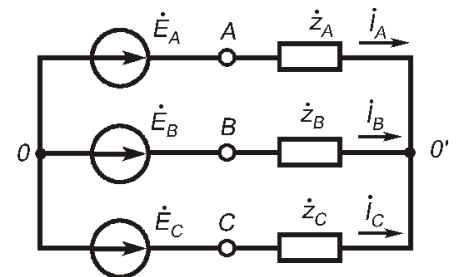


Рис.7.

Рассмотрим свойства основных схем соединения трехфазных цепей. Соединение «звезда - звезда без нулевого провода» (рис.7) применяется только при одинаковой нагрузке всех трех фаз  $\dot{z}_A = \dot{z}_B = \dot{z}_C$  (равномерная нагрузка). Если нагрузка неравномерная, то напряжения на отдельных фазах нагрузки будут различными. Кроме того, эта схема не позволяет проводить включение или отключение отдельных фаз нагрузки (при этом будут меняться электрические режимы в других фазах нагрузки).

Схема «звезда - звезда с нулевым проводом» (рис.8,а) дает возможность использовать различные сопротивления отдельных фаз. В случае необходимости нагрузки фаз могут включаться или отключаться независимо друг от друга. На самолетах и кораблях нейтральным проводом может быть металлический корпус, с которым соединяют нейтральные точки генератора и нагрузок (рис.8, б). Такая же возможность есть при соединении нагрузки треугольником (рис.8, в). При этом напряжения на фазах нагрузки будут равняться линейным напряжениям генератора.

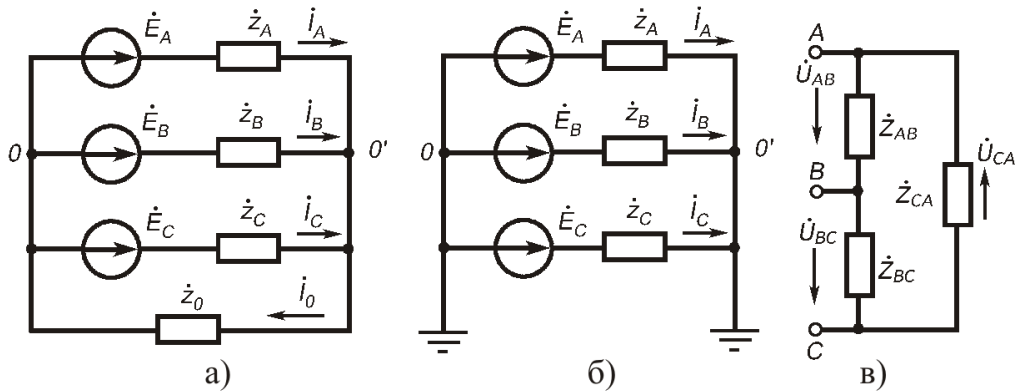


Рис.8

### Соотношение между линейными и фазными напряжениями и токами

В симметричных трехфазных цепях (симметричный генератор и нагрузка) при соединении фаз звездой, линейное напряжение по модулю в  $\sqrt{3}$  раз больше фазного напряжения (действующие значения) (рис.9):

$$U_{\text{л}} = U_{AB} = 2U_A \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}U_A = \sqrt{3}U_{\phi}.$$

Линейные и фазные токи при этом равны  $I_{\text{л}} = I_{\phi}$ .

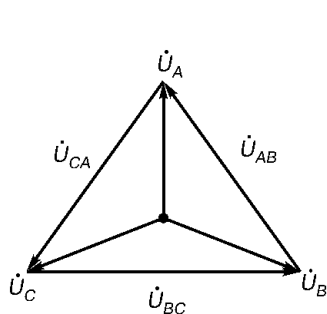


Рис.9

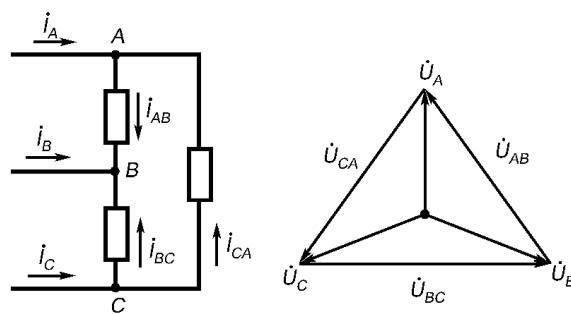


Рис.10

Если фазы соединены треугольником (рис.10), то линейное напряжение равно фазному напряжению  $U_{\text{л}} = U_{\phi}$ , а модули линейных токов в  $\sqrt{3}$  больше фазных:  $I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\phi}$ .

Положительные направления токов в фазах нагрузки выбирают, как показано на рис.10. Тогда по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}.$$

Равенство  $U_l = U_\phi$  дает соотношение только для действующих значений напряжений, но не учитывает их начальных фаз, о чем нельзя забывать. Комплексное изображение линейного напряжения, будет иметь вид:

$$\dot{U}_{AB} = \sqrt{3} \cdot \dot{U}_A e^{j\frac{\pi}{6}}.$$

### Расчет трехфазных цепей

Расчет трехфазной цепи, как и всякой сложной цепи, обычно проводится в комплексной форме. Аналитический расчет рекомендуется сопровождать построением векторно-топографических диаграмм, которое дает возможность качественно контролировать расчеты.

Различают *симметричный* и *несимметричный* режимы работы трехфазной цепи. Для *симметричного режима* ЭДС генератора симметричны, а нагрузки фаз одинаковые (равномерная нагрузка). Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то имеет место *несимметричный режим*.

#### Симметричный режим работы трехфазной цепи

Наиболее простой случай симметричного режима работы «звезда-звезда». Напряжение между нулевыми точками генератора и нагрузки равно:

$$\dot{U}_{0'0} = \frac{\dot{E}_A \dot{Y}_A + \dot{E}_B \dot{Y}_B + \dot{E}_C \dot{Y}_C}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C + \dot{Y}_0} = \frac{\dot{Y}(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C)}{3\dot{Y} + \dot{Y}_0} = 0.$$

Тогда напряжения на нагрузке:

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A; \quad \dot{U}_B = \dot{E}_B; \quad \dot{U}_C = \dot{E}_C.$$

Таким образом, система напряжений симметрична.

Токи также образуют симметричную трехфазную систему, то есть:  $\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_A; \dot{I}_C = a \dot{I}_A; \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$ ,

а следовательно ток нулевого провода  $\dot{I}_0 = 0$ . Наличие нулевого провода в симметричном режиме работы не вносит никаких изменений.

Так как  $\dot{U}_{0'0} = 0$ , то точки  $0'$  и  $0$  эквипотенциальные и их можно соединить. Расчет симметричного режима выполняют для одной из фаз (обычно для фазы  $A$ ), а токи и напряжения других фаз выражают через фазный множитель и соответствующие величины фазы  $A$ , т.е.  $\dot{I}_A = \dot{E}_A / \dot{z}_A$ , а тогда  $\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_A; \dot{I}_C = a \dot{I}_A$ .

Для индуктивного характера нагрузки векторная диаграмма будет иметь вид, показанный на рис.12. Линейные напряжения:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A$$

в  $\sqrt{3}$  раз больше фазных напряжений ( $U_{AB} = \sqrt{3}U_A$ ) и опережают соответствующие фазные напряжения на угол  $\pi/6$ , т.е.  $\dot{U}_{AB} = \sqrt{3}\dot{U}_A e^{j\pi/6}$ .

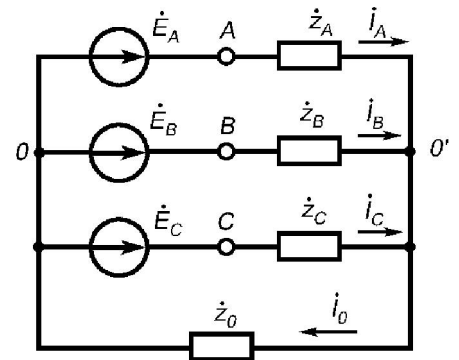


Рис.11

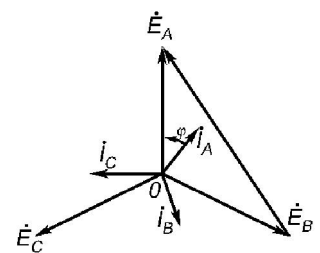


Рис.12

При соединении треугольником (рис.13) основные расчетные соотношения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= \dot{E}_A; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{E}_B; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{E}_C. \\ \dot{I}_{AB} &= \dot{U}_{AB} / \dot{z}_{AB}; \quad \dot{I}_{BC} = \dot{U}_{BC} / \dot{z}_{BC}; \quad \dot{I}_{CA} = \dot{U}_{CA} / \dot{z}_{CA}. \end{aligned}$$

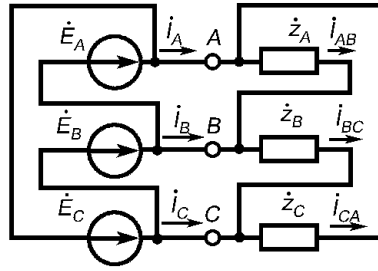


Рис.13

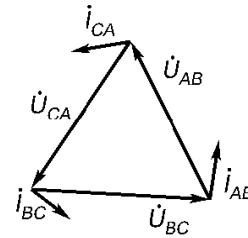


Рис.14

Линейные токи определяются через фазные токи по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}.$$

Модули линейных токов:  $I_L = \sqrt{3}I_\phi$ . Векторно-топографическая диаграмма для  $RL$ - нагрузки показана на рис.14.

Часто соединение генератора или нагрузки треугольником заменяют при расчетах эквивалентной звездой. При этом фазные ЭДС генератора берут в  $\sqrt{3}$  раз меньшими и сдвинутыми на угол  $\pi/6$  относительно соответствующих линейных напряжений. Сопротивления эквивалентной звезды для равномерной нагрузки будут равны  $\dot{z}_Y = \dot{z}_\Delta/3$ .

Пример: Рассчитать симметричный режим в трехфазной цепи. Схема цепи приведена на рис.15.

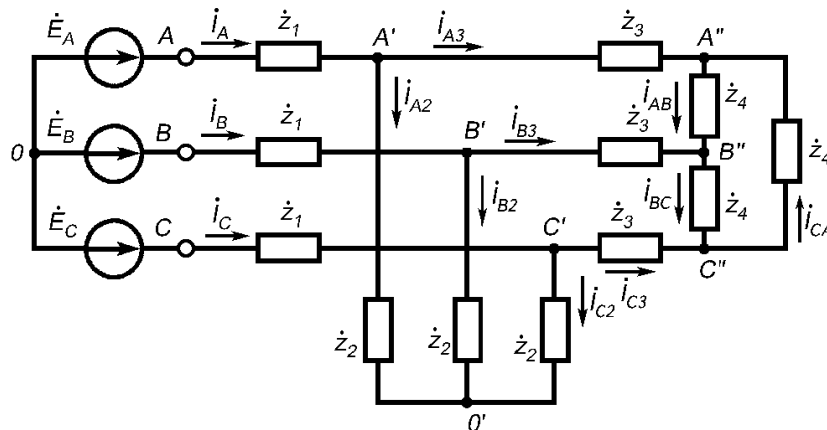


Рис.15

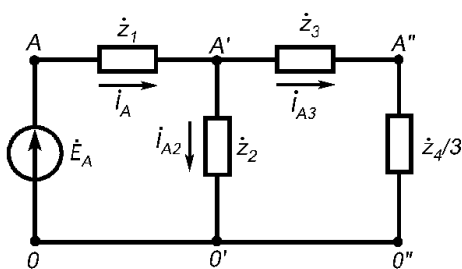


Рис.16

Сопротивления  $\dot{z}_4$ , соединенные треугольником, заменяем эквивалентной звездой с сопротивлениями  $\dot{z}_4/3$ .

Для симметричной цепи нулевые точки генератора  $O$  и нагрузки  $O'$  являются эквипотенциальными, а поэтому их можно соединить. Тогда исходную схему можно свести к однофазной схеме замещения для фазы  $A$  (рис.16).



Находим токи в этой схеме:

$$\dot{I}_A = \dot{E}_A / [\dot{z}_1 + \dot{z}_2(\dot{z}_3 + \dot{z}_4/3) / (\dot{z}_2 + \dot{z}_3 + \dot{z}_4/3)];$$

$$\dot{U}_{A'O'} = \dot{E}_A - \dot{z}_A \dot{I}_A; \quad \dot{I}_{A2} = \dot{U}_{A'O'} / \dot{z}_2; \quad \dot{I}_{A3} = \dot{U}_{A'O'} / (\dot{z}_2 + \dot{z}_4/3).$$

Для фаз **B** и **C** токи определяем через токи фазы **A** и фазный множитель  $a$ :

$$\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_A; \quad \dot{I}_C = a \dot{I}_A \text{ и т.д.}$$

Для нахождения токов  $\dot{I}_{AB}, \dot{I}_{BC}, \dot{I}_{CA}$  в исходной цепи определим напряжение  $\dot{U}_{A''B''}$ :  $\dot{U}_{A''B''} = (\dot{I}_{A3} - \dot{I}_{B3})\dot{z}_4/3$ .

Тогда  $\dot{I}_{AB} = \dot{U}_{A''B''} / \dot{z}_4$ . Токи для фаз **B** и **C** находим через фазный множитель  $\dot{I}_{BC} = a^2 \dot{I}_{AB}$ ;  $\dot{I}_{CA} = a \dot{I}_{AB}$ .

### Несимметричный режим работы трехфазной цепи

Рассмотрим схему соединения «звезда- звезда с нулевым проводом» (рис.17). Расчет такой цепи целесообразно провести методом двух узлов ( $\theta-\theta'$ ):

$$\dot{U}_{\theta'\theta} = \frac{\dot{E}_A \dot{Y}_A + \dot{E}_B \dot{Y}_B + \dot{E}_C \dot{Y}_C}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C + \dot{Y}_0}.$$

Фазные напряжения на нагрузке:

$$\dot{U}_{A'O'} = \dot{E}_A - \dot{U}_{\theta'\theta}; \quad \dot{U}_{B'O'} = \dot{E}_B - \dot{U}_{\theta'\theta}; \quad \dot{U}_{C'O'} = \dot{E}_C - \dot{U}_{\theta'\theta}.$$

Токи находим по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{A'O'} / \dot{z}_A = \dot{U}_{A'O'} \dot{Y}_A; \quad \dot{I}_B = \dot{U}_{B'O'} / \dot{z}_B = \dot{U}_{B'O'} \dot{Y}_B; \quad \dot{I}_C = \dot{U}_{C'O'} / \dot{z}_C = \dot{U}_{C'O'} \dot{Y}_C.$$

Ток в нулевом проводе определяем по первому закону Кирхгофа:  $\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$ .

Векторно-топографическая диаграмма напряжений и токов показана на рис.18.

Если  $\dot{z}_0 \rightarrow 0$ ,  $\dot{Y}_0 \rightarrow \infty$ , то  $\dot{U}_{\theta'\theta} = 0$ .

При этом изменение нагрузки в одной из фаз не влияет на электрические режимы в других фазах.

Если нулевой провод что отсутствует, т.е.  $\dot{z}_0 \rightarrow \infty$ ,  $\dot{Y}_0 \rightarrow 0$ , то разность потенциалов между точками  $\theta'$  -  $\theta$  вычисляется по формуле:

$$\dot{U}_{\theta'\theta} = \frac{\dot{E}_A \dot{Y}_A + \dot{E}_B \dot{Y}_B + \dot{E}_C \dot{Y}_C}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C}.$$

Для фазы **A** напряжение и ток будут равны:  $\dot{U}_{A'O'} = \dot{E}_A - \dot{U}_{\theta'\theta}$ ;  $\dot{I}_A = \dot{U}_{A'O'} \dot{Y}_A$ . Аналогичные выражения имеют место и для других фаз.

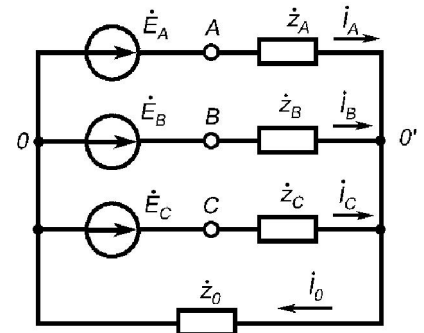


Рис.17

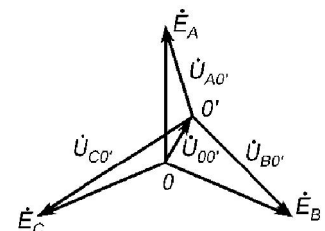


Рис.18

Если в исходных данных заданы линейные напряжения  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$ ,  $\dot{U}_{CA}$  (рис.19), то фазное напряжение, например фазы  $A$ :

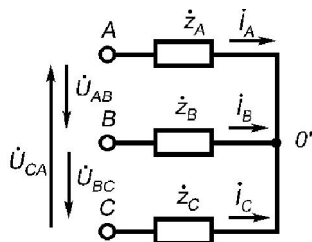


Рис.19

$$\begin{aligned}\dot{U}_{A'O'} &= \dot{U}_A - \frac{\dot{U}_A \dot{Y}_A + \dot{U}_B \dot{Y}_B + \dot{U}_C \dot{Y}_C}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C} = \\ &= \frac{(\dot{U}_A - \dot{U}_B) \dot{Y}_B + (\dot{U}_A - \dot{U}_C) \dot{Y}_C}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C} = \frac{\dot{U}_{AB} \dot{Y}_B - \dot{U}_{CA} \dot{Y}_C}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C}.\end{aligned}$$

Аналогичные выражения можно записать для других фаз:

$$\dot{U}_{B'O'} = \frac{\dot{U}_{BC} \dot{Y}_C - \dot{U}_{AB} \dot{Y}_A}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C}; \quad \dot{U}_{C'O'} = \frac{\dot{U}_{CA} \dot{Y}_A - \dot{U}_{BC} \dot{Y}_B}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C}.$$

Если нагрузка равномерная  $\dot{Y}_A = \dot{Y}_B = \dot{Y}_C$ , то:

$$\dot{U}_{A'O'} = \frac{1}{3}(\dot{U}_{AB} - \dot{U}_{CA}); \quad \dot{U}_{B'O'} = \frac{1}{3}(\dot{U}_{BC} - \dot{U}_{AB}); \quad \dot{U}_{C'O'} = \frac{1}{3}(\dot{U}_{CA} - \dot{U}_{BC}).$$

Далее, зная напряжения и сопротивления нагрузок, определяем токи.

### Соединение нагрузки треугольником

При соединении нагрузки треугольником (рис.20) расчет производится в следующей последовательности.

Заменяем треугольник эквивалентной звездой:

$$\dot{z}_A = \dot{z}_{AB} \dot{z}_{CA} / \dot{z}; \quad \dot{z}_B = \dot{z}_{BC} \dot{z}_{AB} / \dot{z}; \quad \dot{z}_C = \dot{z}_{BC} \dot{z}_{CA} / \dot{z},$$

где  $\dot{z} = \dot{z}_{AB} + \dot{z}_{BC} + \dot{z}_{CA}$ . Тогда:

$$\dot{Y}'_A = \frac{1}{\dot{z}_{ЛА} + \dot{z}_A}; \quad \dot{Y}'_B = \frac{1}{\dot{z}_{ЛВ} + \dot{z}_B}; \quad \dot{Y}'_C = \frac{1}{\dot{z}_{ЛС} + \dot{z}_C},$$

где  $\dot{z}_{ЛА}$ ,  $\dot{z}_{ЛВ}$ ,  $\dot{z}_{ЛС}$  - сопротивления линейных проводов.

Напряжения  $\dot{U}_{A'O'}$ ,  $\dot{U}_{B'O'}$ ,  $\dot{U}_{C'O'}$  находим через фазные, или линейные напряжения генератора в соответствии с рассмотренными ранее случаями.

Определяем линейные токи:

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{A'O'} \dot{Y}'_A; \quad \dot{I}_B = \dot{U}_{B'O'} \dot{Y}'_B; \quad \dot{I}_C = \dot{U}_{C'O'} \dot{Y}'_C.$$

Фазные токи определяются через фазные напряжения  $\dot{U}_{A'B'}$ ,  $\dot{U}_{B'C'}$ ,  $\dot{U}_{C'A'}$ , которые можно найти по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{A'B'} &= \dot{z}_A \dot{I}_A - \dot{z}_B \dot{I}_B; \quad \dot{U}_{B'C'} = \dot{z}_B \dot{I}_B - \dot{z}_C \dot{I}_C; \quad \dot{U}_{C'A'} = \dot{z}_C \dot{I}_C - \dot{z}_A \dot{I}_A. \\ \dot{I}_{AB} &= \dot{U}_{A'B'} / \dot{z}_{AB}; \quad \dot{I}_{BC} = \dot{U}_{B'C'} / \dot{z}_{BC}; \quad \dot{I}_{CA} = \dot{U}_{C'A'} / \dot{z}_{CA}.\end{aligned}$$

**Если есть несколько нагрузок, соединенных звездой, то объединять их нулевые точки нельзя, поскольку при несимметричном режиме они имеют различные потенциалы!!!** Нужно перейти от соединения звездой к соединению треугольником, объединить параллельно включенные треугольники. Такими эквивалентными преобразованиями схема может быть сведена к одному из рассмотренных выше случаев.

## Мощность в трехфазных цепях

В общем случае комплексная мощность трехфазной цепи определяется по формуле :

$$\dot{S} = \dot{U}_A \dot{I}_A^* + \dot{U}_B \dot{I}_B^* + \dot{U}_C \dot{I}_C^*,$$

где  $\dot{U}_A, \dot{I}_A$  – фазные напряжения и токи.

Активная мощность цепи:

$$P = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C.$$

Реактивная мощность цепи:

$$Q = U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C,$$

$\varphi$  - сдвиг по фазе фазных напряжений и токов.

При наличии нулевого провода суммарная активная мощность, которая потребляется несимметричной трехфазной нагрузкой, может быть измерена тремя ваттметрами (рис.21).

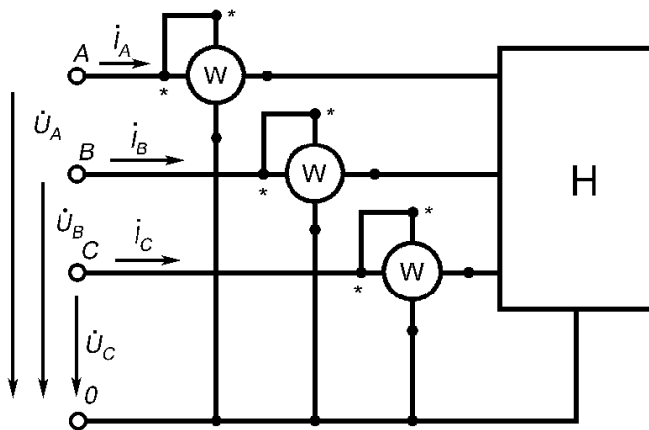


Рис.21

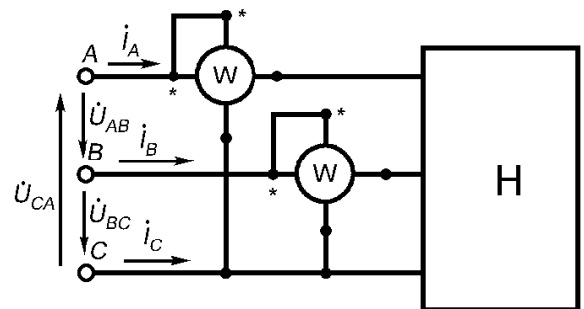


Рис.22

Активная мощность трехфазной цепи будет равняться сумме показаний трех ваттметров.

Если нулевого провода нет, то можно использовать показания двух ваттметров, которые нужно включить согласно схеме, приведенной на рис.22.

Действительно, по первому закону Кирхгофа  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$ , т.е.  $\dot{I}_C = -(\dot{I}_A + \dot{I}_B)$ .

Подставляем  $\dot{I}_C$  в выражение для комплексной мощности:

$$\dot{S} = \dot{U}_A \dot{I}_A^* + \dot{U}_B \dot{I}_B^* - \dot{U}_C (\dot{I}_A + \dot{I}_B)^* = (\dot{U}_A - \dot{U}_C) \dot{I}_A^* + (\dot{U}_B - \dot{U}_C) \dot{I}_B^* = \dot{U}_{AC} \dot{I}_A^* + \dot{U}_{BC} \dot{I}_B^* .$$

Циклической перестановкой индексов  $A, B, C$  можно получить выражения для других равноценных вариантов включения двух ваттметров.

Показания ваттметров суммируются алгебраически. Если стрелка отклонилась по шкале прибора, то показания берут со знаком «+». Если стрелка отклонилась в обратную сторону, то меняют полярность включения одной из обмоток, достигая при этом отклонение стрелки в нужном направлении, но показания ваттметра при этом берутся со знаком «-».

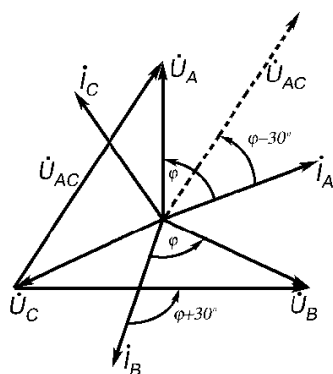


Рис.23

В случае симметричного режима работы трехфазной цепи такой случай имеет место, если сдвиг фаз между напряжением и током  $|\varphi| > 60^\circ$  (рис.23). Действительно, в этом случае для показаний ваттметров можно записать:

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos(\varphi - 30^\circ) = U_{Л} I_{Л} \cos(\varphi - 30^\circ);$$

$$P_2 = U_{BC} I_B \cos(\varphi + 30^\circ) = U_{Л} I_{Л} \cos(\varphi + 30^\circ).$$

Сумма показаний ваттметров:

$$P_1 + P_2 = 2U_{Л} I_{Л} \cos\varphi \cos 30^\circ = \sqrt{3} U_{Л} I_{Л} \cos\varphi = P,$$

где  $P$  - активная мощность трехфазной цепи.

Разность показаний ваттметров  $P_1 - P_2 = 2U_{Л} I_{Л} \sin\varphi \sin 30^\circ = U_{Л} I_{Л} \sin\varphi$ .

Отсюда 
$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}.$$

Для симметричного режима трехфазной цепи:

$$\dot{S} = 3\dot{U}_{\Phi} \dot{I}_{\Phi}^*; \quad P = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \cos\varphi; \quad Q = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \sin\varphi.$$

Если нагрузка соединена звездой, то  $U_{Л} = \sqrt{3}U_{\Phi}$ ;  $I_{Л} = I_{\Phi}$ , а при соединении треугольником -  $U_{Л} = U_{\Phi}$ ;  $I_{Л} = \sqrt{3}I_{\Phi}$ . Таким образом, независимо от схемы соединения нагрузки выражение мощности через линейные напряжения и токи имеет вид:  $P = \sqrt{3}U_{Л} I_{Л} \cos\varphi$ ;  $Q = \sqrt{3}U_{Л} I_{Л} \sin\varphi$ ;  $I = \sqrt{3}U_{Л} I_{Л}$ ,

где  $\varphi$  - сдвиг фаз между фазными напряжениями и токами.

Эти выражения не означают, что при переключении одной и той же нагрузки со звезды в треугольник и наоборот мощность не меняется. При пересоединении нагрузки  $Z$  со звезды в треугольник для заданных линейных напряжений фазные токи нагрузки увеличиваются в  $\sqrt{3}$  раз, а линейные токи в 3 раза, т.е. мощность также увеличивается в 3 раза.

Для измерения активной мощности симметричной трехфазной цепи с нулевым проводом достаточно одного ваттметра (рис.24, а), показания которого нужно утроить.

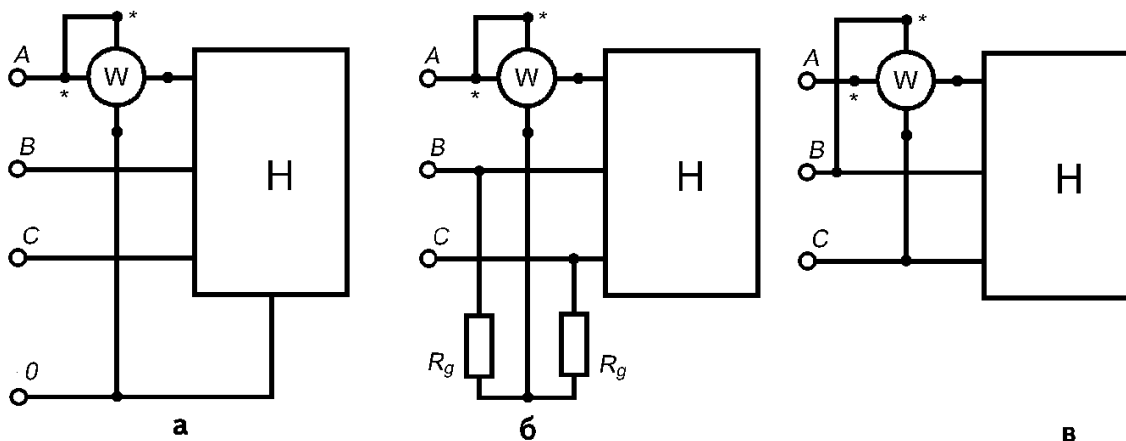


Рис.24

Если нейтрали (нулевого провода) нет, или нагрузка соединена треугольником, то используют схему с дополнительными сопротивлениями  $R_d$  (рис.24, б) Эти сопротивления должны быть равны внутреннему сопротивлению параллельной обмотки ваттметра. При этом создается искусственная нулевая точка. Сопротивление ваттметра должно быть чисто активным (электродинамический или ферродинамический прибор). Для определения суммарной активной мощности всей цепи показания ваттметра нужно утроить.

В симметричной трехфазной цепи при помощи ваттметра можно измерять реактивную мощность цепи. Если ваттметр включен как показано на рис.24, в, то показания ваттметра можно определить таким образом:

$$U_{BC} I_A \cos(\varphi - 90^\circ) = U_{BC} I_A \sin \varphi .$$

Для определения реактивной мощности всей цепи показания ваттметра нужно умножить на  $\sqrt{3}$ .

### Круговое вращающееся магнитное поле

Пусть через катушку проходит ток  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$ . Принятому положительному направлению тока соответствует положительное направление вектора магнитной индукции, которое указано стрелкой вдоль оси катушки на рис.25 (направление согласуется по правилу правоходового винта). Причем  $B(t) = B_m \sin(\omega t + \psi)$ .

Когда ток отрицателен, вектор магнитной индукции  $B = \frac{L}{S} i(t)$  имеет противоположное направление (показан пунктиром).

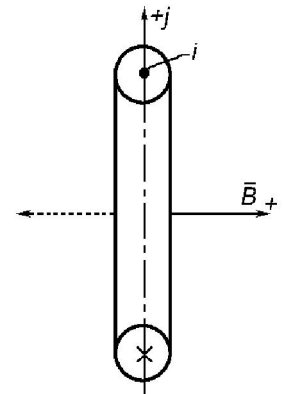


Рис.25

Таким образом, магнитное поле вдоль оси катушки будет переменным (пульсирующим). Такое поле называют пульсирующим магнитным полем.

Круговым вращающимся магнитным полем называется такое магнитное поле, ось которого вращается, а значение магнитной индукции на этой оси не изменяется.

Магнитное поле, пульсирующее по закону синуса или косинуса, может рассматриваться как результат наложения двух круговых полей, которые вращаются в противоположные стороны с угловыми скоростями, равными угловой частоте переменного тока и имеют максимальное значение индукции на вращающейся оси вдвое меньше амплитуды индукции пульсирующего поля (рис.26). Это вытекает из формул Эйлера:

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}); \quad \cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}).$$

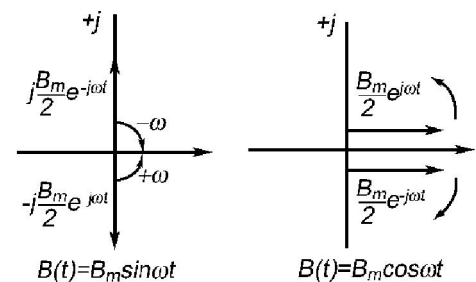


Рис.26

Пусть через две катушки, расположенные взаимно перпендикулярно (рис.27), проходят токи одинаковой амплитуды и частоты, но сдвинутые по фазе относительно друг друга на четверть периода:

$$i_1(t) = I_m \sin \omega t; \quad i_2(t) = I_m \sin(\omega t + \pi/2) = I_m \cos \omega t.$$

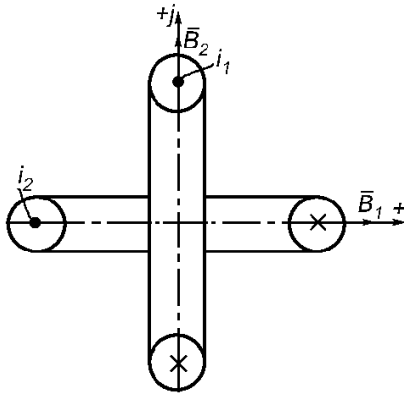


Рис.27

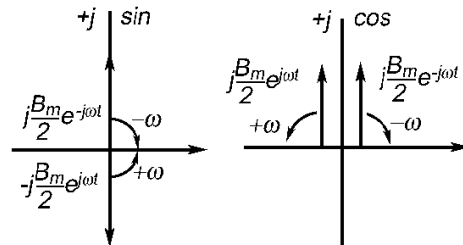


Рис.28

Принятым положительным направлениям токов  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$ , соответствуют взаимно перпендикулярные магнитные потоки с индукциями  $B_1(t) = B_m \sin \omega t$  и  $B_2(t) = B_m \cos \omega t$ . Если представить пульсирующие поля суммой вращающихся полей (рис.28), то можно увидеть, что векторы  $-j(B_m/2)e^{j\omega t}$  и  $j(B_m/2)e^{j\omega t}$ , которые вращаются в положительном направлении (против хода часовой стрелки) взаимно компенсируются. Два других вектора составляют в сумме вектор  $jB_m e^{-j\omega t}$ , вращающийся в отрицательном направлении (по ходу часовой стрелки). Такой же результат можно получить для вектора  $\bar{B}(t)$  по формуле:

$$\bar{B}(t) = B_1(t) + jB_2(t) = B_m (\sin \omega t + j \cos \omega t) = jB_m e^{-j\omega t}.$$

Таким образом, ось магнитного поля равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  и неизменным значением индукции  $B_m$ , т.е. получается круговое вращающееся магнитное поле.

Направление вращения зависит от положительных направлений магнитных индукций и от того, какая из них является отстающей. В данном случае  $B_1(t)$  отстает от  $B_2(t)$  на угол,  $\pi/2$  и магнитное поле вращается в отрицательном направлении (по ходу часовой стрелки).

Если изменить направление тока в одной из катушек, то магнитное поле будет вращаться в положительном направлении (против хода часовой стрелки).

*При сложении двух взаимно перпендикулярных пульсирующих магнитных полей, сдвинутых по фазе на четверть периода, получается круговое магнитное поле, которое вращается с угловой скоростью  $\omega$  в сторону отстающего по фазе вектора магнитной индукции.*

Такой способ получения кругового вращающегося магнитного поля широко используется в приборостроении. В случае трехфазного тока оси трех катушек сдвинуты относительно друг друга на  $120^\circ$  и подключены к симметричному трехфазному генератору (рис.29). По катушкам будут проходить токи:

$$i_A(t) = I_m \sin \omega t; \quad i_B(t) = I_m \sin(\omega t - 2\pi/3); \\ i_C(t) = I_m \sin(\omega t + 2\pi/3).$$

Положительным направлениям токов на рис.29 соответствуют положительные направления магнитных потоков (векторов магнитной индукции), которые показаны стрелками.

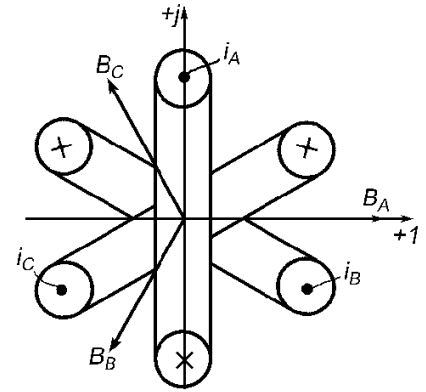


Рис.29

При пропорциональной зависимости индукций от токов  $B = \frac{L}{S}i(t)$  можно записать:  $B_A(t) = B_m \sin \omega t$ ;  $B_B(t) = B_m \sin(\omega t - 2\pi/3)$ ;  $B_C(t) = B_m \sin(\omega t + 2\pi/3)$ .

Вектор индукции  $\bar{B}(t)$  для заданных направлений векторов можно записать таким образом:

$$\bar{B}(t) = [\bar{B}_A(t) + a^2 \bar{B}_B(t) + a \bar{B}_C(t)] = B_m \left( \sin \omega t + a^2 \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + a \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \\ = B_m \left( \sin \omega t + a^2 \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{3} - a^2 \cos \omega t \sin \frac{2\pi}{3} + a \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{3} + a \sin \frac{2\pi}{3} \cos \omega t \right) = \\ = B_m \frac{3}{2} (\sin \omega t + j \cos \omega t) = j1,5 B_m e^{-j\omega t}.$$

Вектор  $\bar{B}(t)$  имеет постоянный модуль, равный  $1,5B_m$ , и равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  от оси фазы  $A$  к оси фазы  $B$  и так далее (по ходу часовой стрелки), т.е. получается круговое вращающееся магнитное поле.

Для изменения направления вращения поля достаточно изменить направления токов в любых двух катушках, например  $i_B(t)$  и  $i_C(t)$ .

Из-за несимметрии токов в катушках получается эллиптическое вращающееся магнитное поле, вектор индукции которого описывает эллипс и имеет переменную угловую скорость.

В электрических машинах вращающееся магнитное поле создают при помощи обмоток, которые расположены в пазах неподвижной части машины-статора.

## ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Часть электрической цепи, рассматриваемая относительно любых двух пар ее выводов, называется **четыреполюсником**. Понятием о четырехполюснике пользуются в тех случаях, когда интересуются только токами в любых двух ветвях или напряжениями двух пар узлов (фильтры, усилители, устройства коррекции, трансформаторы и т.д.).

При этом предметом исследования выступают токи и напряжения выводов, а не токи и напряжения внутри самого четырехполюсника.

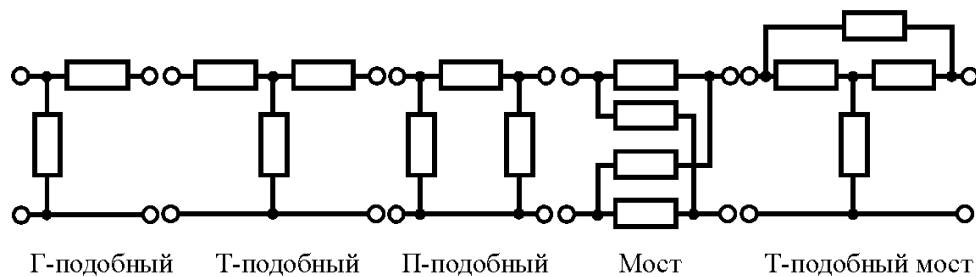


Рис.30

Четырехполюсники классифицируют по различным признакам:

- линейные и нелинейные;
- по схеме внутренних соединений (рис.30);
- активные и пассивные;
- автономные и неавтономные (четырехполюсник неавтономный, если при отключении от схемы напряжение на выводах схемы отсутствует);
- симметричные и несимметричные (четырехполюсник будет симметричным, если изменение мест входа и выхода не меняет токов и напряжений в круге, с которым он объединен);
- обратимые и необратимые (если выполняется принцип взаимности, то обратимые, если нет – то необратимые).

Пассивные линейные четырехполюсники обратимы. Симметричные четырехполюсники всегда обратимы. Несимметричные активные четырехполюсники необратимы.

Основная идея теории четырехполюсников заключается в том, что используя некоторые обобщенные параметры можно определить токи и напряжения на входе и выходе четырехполюсника.

### Системы уравнений четырехполюсников

Пусть есть четырехполюсник, который не содержит источников электрической энергии, т.е. пассивный четырехполюсник. Для токов и напряжений на выводах могут быть выбраны различные положительные направления

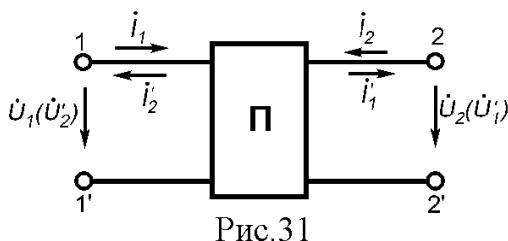


Рис.31

(рис.31). Вариант с токами  $i_1, i_2$  называют прямой передачей, а вариант  $i'_1, i'_2$  - обратной передачей. Используют также вариант  $i'_1 = -i_2$ .

Напряжения и токи на выводах четырехполюсника обусловлены присоединением активных цепей к обеим парам выводов или присоединением к одной паре выводов активной цепи, а к другой - пассивной.



Четырехполюсник можно охарактеризовать напряжениями и токами на его выводах:  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{U}'_1, \dot{U}'_2, \dot{I}'_1, \dot{I}'_2$ .

Произвольную пару этих величин можно считать независимой, а другую пару - зависимой. Соотношения между напряжениями и токами на входе и выходе четырехполюсника могут быть описаны в виде шести различных систем (форм) уравнений: **Y, Z, A, B, H, G** (число сочетаний из 4-х по два). Для каждой системы уравнений (параметров четырехполюсника) имеется своя, наиболее подходящая область применения, которая определяется структурой цепи, значениями элементов и способами соединения выводов с внешними цепями.

### Y- форма записи уравнений четырехполюсника

Пусть независимыми переменными будут  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ , а зависимыми – токи  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ . Система уравнений будет иметь такой вид:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2. \end{cases}$$

Для систем **Y, Z, H, G** формы за положительные приняты направления токов и напряжений, соответствующие прямой передаче. Коэффициенты уравнений  $Y_{11} - Y_{22}$  – комплексные величины, но точки над ними ставить не принято.

Параметры четырехполюсника целесообразно определять, используя режим короткого замыкания.

Пусть  $\dot{U}_2 \equiv 0$ , короткое замыкание на выходе (рис.32).

При этом:

$$Y_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2 = 0} \quad Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2 = 0}$$

Если подключить источник к выводам 2 - 2', а 1 - 1' закоротить (рис.33), получим:

$$Y_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1 = 0} \quad Y_{12} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1 = 0} .$$

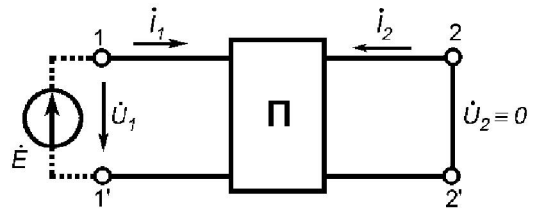


Рис.32

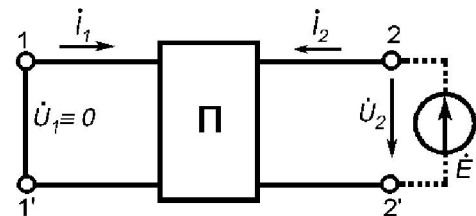


Рис.33

В общем случае четырехполюсник характеризуется четырьмя коэффициентами. Для обратимых четырехполюсников при условии  $\dot{U}_1 = \dot{U}_2, \dot{I}_1 = \dot{I}_2, \dot{I}_1 = Y_{12}\dot{U}_2; \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 \Leftrightarrow Y_{12} = Y_{21}$ , будет только три независимых коэффициента.

Определим условия симметричности четырехполюсника. Рассмотрим четырехполюсник с обратной передачей сигналов. Подставим  $\dot{U}'_1, \dot{U}'_2, \dot{I}'_1, \dot{I}'_2$  в  $Y$ -систему уравнений вместо  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_1, \dot{I}_2$ :

$$\begin{cases} \dot{I}'_2 = Y_{11}\dot{U}'_2 + Y_{12}\dot{U}'_1; \\ \dot{I}'_1 = Y_{21}\dot{U}'_2 + Y_{22}\dot{U}'_1. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{I}'_1 = Y_{22}\dot{U}'_1 + Y_{21}\dot{U}'_2; \\ \dot{I}'_2 = Y_{12}\dot{U}'_1 + Y_{11}\dot{U}'_2. \end{cases}$$

Таким образом, условие симметричности четырехполюсника будет  $Y_{11} = Y_{22}$ .

Для симметричных четырехполюсников будет только два независимых коэффициента, поскольку  $Y_{11} = Y_{22}$  (условие симметричности),  $Y_{12} = Y_{21}$  (условие обратимости).

Уравнения четырехполюсника обычно записывают в матричной форме:

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}},$$

$$\text{где } \dot{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}; Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}.$$

### **Z - форма записи уравнений четырехполюсника**

Выразим напряжения  $\dot{U}_1, \dot{U}_2$ , через токи  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ . Найдем решение системы уравнений для  $Y$ -параметров:

$$\Delta_Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21};$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 & Y_{12} \\ \dot{I}_2 & Y_{22} \end{bmatrix} = Y_{22}\dot{I}_1 - Y_{12}\dot{I}_2; \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} Y_{11} & \dot{I}_1 \\ Y_{21} & \dot{I}_2 \end{bmatrix} = -Y_{21}\dot{I}_1 + Y_{11}\dot{I}_2.$$

Тогда будем иметь:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_Y} = \frac{Y_{22}}{\Delta_Y}\dot{I}_1 - \frac{Y_{12}}{\Delta_Y}\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_Y} = -\frac{Y_{21}}{\Delta_Y}\dot{I}_1 + \frac{Y_{11}}{\Delta_Y}\dot{I}_2; \end{cases} = \begin{cases} \dot{U}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

Получили связь между « $Y$ » и « $Z$ » параметрами четырехполюсника:

$$z_{11} = \frac{Y_{22}}{\Delta_Y}; \quad z_{12} = -\frac{Y_{12}}{\Delta_Y}; \quad z_{21} = -\frac{Y_{21}}{\Delta_Y}; \quad z_{22} = \frac{Y_{11}}{\Delta_Y}.$$

Для того, чтобы коэффициенты уравнений одной формы определить через коэффициенты уравнений другой формы, необходимо выразить какие-нибудь две одинаковые величины в этих формах записи и сравнить их. Связь между различными параметрами четырехполюсников дают в виде таблиц.

$Z$  – параметры четырехполюсника можно легко определить из опытов в режиме холостого хода (рис.34, 35):

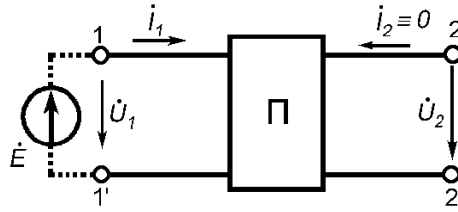


Рис.34

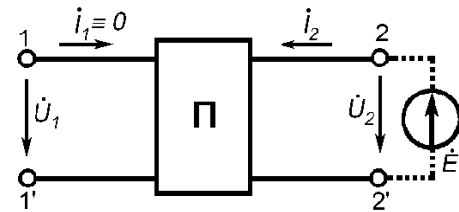


Рис.35

$$z_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2 = 0} ; z_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2 = 0} ; z_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1 = 0} ; z_{22} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1 = 0} .$$

$Y_{11}$  и  $z_{11}$ ,  $Y_{22}$  и  $z_{22}$  не являются взаимно обратными величинами, потому что они определяются для различных режимов (к. з. и х.х.).

Условие обратимости  $z_{12} = z_{21}$ ; условие симметрии  $z_{11} = z_{22}$ .

В матричной форме уравнения  $z$  – формы могут быть записаны в виде:

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{z} \dot{\mathbf{I}} ,$$

где  $\dot{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$ ;  $\dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$ .

### **A - форма записи уравнений четырехполюсник**

Система уравнений в A-форме имеет вид:

$$\dot{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} .$$

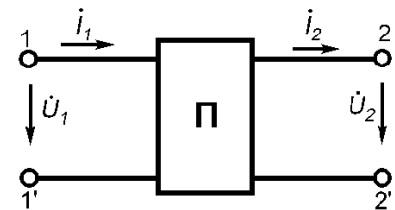


Рис.36

Положительные направления токов и напряжений соответствуют указанным на рис.36.

Определим из системы уравнений Y-формы  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{I}_1$  через  $\dot{U}_2$ ,  $\dot{I}_2$ . Для этого из второго уравнения находим  $\dot{U}_1$  и подставляем в первое уравнение:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}} \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = Y_{11} \left( -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}} \dot{I}_2 \right) + Y_{12} \dot{U}_2; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{U}_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}} \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = \left( Y_{12} - \frac{Y_{11} Y_{22}}{Y_{21}} \right) \dot{U}_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}} \dot{I}_2. \end{cases}$$



случае для описания необратимого четырехполюсника параметров холостого хода и короткого замыкания уже недостаточно. Покажем только три из четырех параметров независимые. С учетом связи между  $Y$  и  $z$ -параметрами четырехполюсника можно записать:

$$\frac{Z_{1K}}{Z_{1X}} = \frac{1}{Y_{11}Z_{11}} = \frac{|Y|}{Y_{11}Y_{22}}; \quad \frac{Z_{2K}}{Z_{2X}} = \frac{1}{Y_{22}Z_{22}} = \frac{|Y|}{Y_{11}Y_{22}}.$$

Отсюда получаем равенство  $\frac{Z_{1K}}{Z_{1X}} = \frac{Z_{2K}}{Z_{2X}}$ . Таким образом, любой из

параметров холостого хода и короткого замыкания можно выразить через три остальных.

Если четырехполюсник симметричный, то  $Z_{1K} = Z_{2K}$ ;  $Z_{1X} = Z_{2X}$ , т.е. он характеризуется только двумя параметрами.

Параметры холостого хода и короткого замыкания могут быть выражены через любую систему коэффициентов четырехполюсника, например через  $A$ -параметры:  $Z_{1K} = B/D$ ;  $Z_{2K} = B/A$ ;  $Z_{1X} = A/C$ ;  $Z_{2X} = D/C$ .

В свою очередь любая система коэффициентов обратимого четырехполюсника может быть выражена через параметры холостого хода и короткого замыкания.

Например:  $AD - BC = 1$ ;  $B = AZ_{2K}$ ;  $C = \frac{A}{Z_{1X}}$ ;  $D = A \frac{Z_{2X}}{Z_{1X}}$  или

$$A \cdot A \frac{Z_{2X}}{Z_{1X}} - AZ_{2K} \cdot \frac{A}{Z_{1X}} = A^2 \left( \frac{Z_{2X} - Z_{2K}}{Z_{1X}} \right) = 1; \quad A = \pm \sqrt{\frac{Z_{1X}}{Z_{2X} - Z_{2K}}}.$$

Для коэффициента  $A$  могут быть знаки «+» или «-» в зависимости от выбранных положительных направлений токов и напряжений.

## Схемы замещения четырехполюсников

На основе уравнений четырехполюсников могут быть построены различные схемы замещения, которые облегчают исследование общих свойств исследуемой цепи. На практике наиболее часто используют « $T$ » или « $II$ » образные схемы замещения. Сначала рассмотрим схемы замещения обратимых четырехполюсников (содержат только пассивные элементы).

### Схемы замещения обратимых четырехполюсников

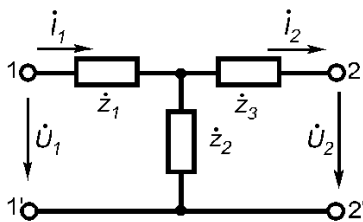


Рис.39

Выразим параметры  $T$ -образной схемы замещения (рис.39) через  $A$ -коэффициенты четырехполюсника. Запишем уравнения  $A$ -формы для  $T$ -образной схемы:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \left( \dot{I}_2 z_3 + \dot{U}_2 \right) / z_2 = \frac{1}{z_2} \dot{U}_2 + \left( 1 + \frac{z_3}{z_2} \right) \dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_1 = z_1 \dot{I}_1 + z_3 \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = \left( 1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \dot{U}_2 + \left( z_1 + z_3 + \frac{z_1 z_3}{z_2} \right) \dot{I}_2.$$

Т.е. можно записать:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \left(1 + \frac{\dot{z}_1}{\dot{z}_2}\right) \dot{U}_2 + \left(\dot{z}_1 + \dot{z}_3 + \frac{\dot{z}_1 \dot{z}_2}{\dot{z}_2}\right) \cdot \dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = \frac{1}{\dot{z}_2} \dot{U}_2 + \left(1 + \frac{\dot{z}_3}{\dot{z}_2}\right) \cdot \dot{I}_2 \end{cases} \parallel \begin{cases} \dot{U}_1 = A \dot{U}_2 + B \dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C \dot{U}_2 + D \dot{I}_2 \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$A = 1 + \dot{z}_1 / \dot{z}_2; \quad B = \dot{z}_1 + \dot{z}_3 + \dot{z}_1 \dot{z}_3 / \dot{z}_2; \quad C = 1 / \dot{z}_2; \quad D = 1 + \dot{z}_3 / \dot{z}_2.$$

Тогда для  $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3$  будет иметь место:

$$\dot{z}_2 = 1/C; \quad \dot{z}_2 = (A-1)/C; \quad \dot{z}_3 = (D-1)/C.$$

Параметры  $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3$  можно определить через коэффициенты Z-формы (ток  $\dot{I}_2$  имеет направление противоположное, показанному на рис.39):

$$\begin{aligned} z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \dot{z}_1 + \dot{z}_2 \Big|_{\dot{I}_2 = 0}; \quad z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{z}_2 \dot{I}_2}{\dot{I}_2} = \dot{z}_2 \Big|_{\dot{I}_1 = 0}; \quad z_{21} = z_{12} = \dot{z}_2; \\ z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \dot{z}_2 + \dot{z}_3 \Big|_{\dot{I}_1 = 0}. \end{aligned}$$

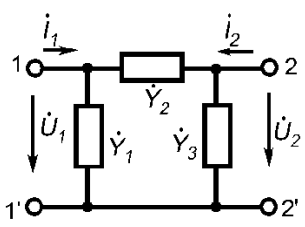
Тогда будем иметь:

$$\dot{z}_2 = z_{12} = z_{21}; \quad \dot{z}_1 = z_{11} - z_{12}; \quad \dot{z}_3 = z_{22} - z_{12}.$$

Аналогично можно выразить параметры T-образной схемы через параметры других систем «Y», «H», «G», «B».

Рассмотрим П-образную систему замещения (рис.40).

Для Y – параметров можно записать такие соотношения



$$\begin{aligned} Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 \Big|_{\dot{U}_2 = 0}; \quad Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} = -\dot{Y}_2 \Big|_{\dot{U}_1 = 0}; \quad Y_{12} = Y_{21}; \\ Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 \Big|_{\dot{U}_1 = 0}. \end{aligned}$$

Рис.40

Тогда будем иметь

$$\dot{Y}_2 = -Y_{12}; \quad \dot{Y}_1 = Y_{11} + Y_{12}; \quad \dot{Y}_3 = Y_{22} + Y_{12}.$$

Пассивный П-образный четырехполюсник может быть преобразован в T-образный (или наоборот) по правилу преобразования треугольника в эквивалентную звезду.

$\Pi$  и  $T$  -образные схемы замещения четырехполюсников, содержащие реактивные элементы, физически можно реализовать только тогда, когда параметры  $R, L, C$  положительны. Четырехполюсник без реактивных элементов всегда можно физически реализовать.

### Схемы замещения необратимых четырехполюсников

Рассмотрим  $T$  - образную схему замещения и выразим ее параметры через  $z$  - коэффициенты четырехполюсника.

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = z_{11} \dot{I}_1 + z_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = z_{21} \dot{I}_1 + z_{22} \dot{I}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{U}_1 = z_{11} \dot{I}_1 + z_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = z_{12} \dot{I}_1 + z_{22} \dot{I}_2 + \underbrace{(z_{21} - z_{12})}_{\dot{E}(I_1)} \dot{I}_1 \end{cases}$$

Таким образом, схема замещения необратимого четырехполюсника (рис.41) может быть представлена схемой замещения обратимого четырехполюсника, дополненной зависимым источником напряжения  $\dot{E}(I_1)$ .

$$\dot{z}_2 = z_{12} = z_{21}; \quad \dot{z}_1 = z_{11} - z_{12}; \quad \dot{z}_3 = z_{22} - z_{12}.$$

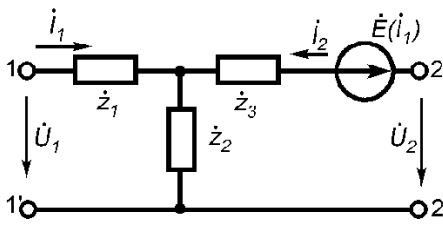


Рис.41

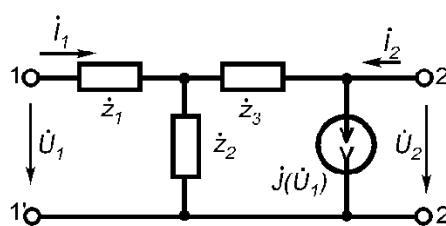


Рис.42

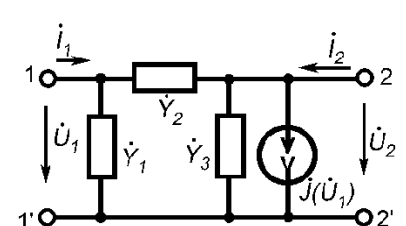


Рис.43

Можно изобразить схему с зависимым источником тока. Рассмотрим уравнения  $Y$ -формы:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 = Y_{12} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2 + \underbrace{(Y_{21} - Y_{12})}_{\dot{J}(U_1)} \dot{U}_1. \end{cases}$$

Этим уравнениям соответствует схема замещения, показанная на рис.42

Аналогично можно получить  $\Pi$ -образную схему замещения (рис.43):

$$\dot{Y}_1 = Y_{11} + Y_{12}; \quad \dot{Y}_2 = -Y_{12}; \quad \dot{Y}_3 = Y_{22} + Y_{12}.$$

Схемы замещения необратимых четырехполюсников содержат 3 пассивных элемента и один зависимый источник энергии (или 2 пассивных и 2 зависимых источника).

Схемы замещения необратимых четырехполюсников используют для анализа и расчета электронных цепей, которые содержат транзисторы, электронные лампы, микросхемы и др.

## Входные и характеристические сопротивления четырехполюсника

Запишем систему уравнений в  $A$ -форме: 
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2; \end{cases} \quad \dot{U}_2 = z_2 \dot{I}_2.$$

Входное сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов 1-1' (рис.44):

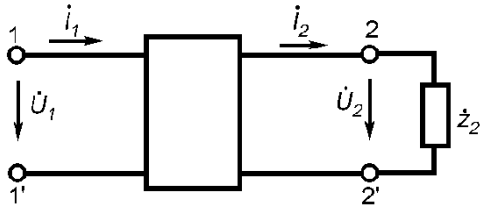


Рис.44

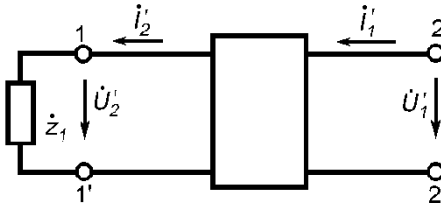


Рис.45

$$\dot{Z}_{BX1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2} = \left| \dot{U}_2 = z_2 \dot{I}_2 \right| = \frac{Az_2 + B}{Cz_2 + D};$$

Для режима холостого хода  $z_2 = \infty \rightarrow z_{1X} = A/C$ . Для режима короткого замыкания  $z_2 = 0 \rightarrow z_{1K} = B/D$ . При обратной передаче сигнала нагрузка подключена к зажимам 1-1' (рис.45):

$$\dot{Z}_{BX2} = \frac{\dot{U}'_1}{\dot{I}'_1} = \frac{D\dot{U}'_2 + B\dot{I}'_2}{C\dot{U}'_2 + A\dot{I}'_2} \left| \dot{U}'_2 = z_1 \dot{I}'_2 \right| = \frac{Dz_1 + B}{Cz_1 + A};$$

$$z_1 = \infty \rightarrow z_{2X} = D/C; \quad z_1 = 0 \rightarrow z_{2K} = B/A.$$

Характеристическими сопротивлениями четырехполюсника называется такая пара сопротивлений  $Z_{C1}$  и  $Z_{C2}$ , для которой входное сопротивление четырехполюсника нагруженного сопротивлением  $Z_{C2}$ , равняется  $Z_{C1}$ , а входное сопротивление четырехполюсника нагруженного сопротивлением  $Z_{C1}$ , равняется  $Z_{C2}$ .

$$Z_{C1} = \frac{AZ_{C2} + B}{CZ_{C2} + D}; \quad Z_{C2} = \frac{DZ_{C1} + B}{CZ_{C1} + A} \quad (*)$$

Условие, когда четырехполюсник нагружен соответствующим характеристическим сопротивлением, называется условием согласованной нагрузки, или согласованного включения.

С соотношений (\*) можно получить:

$$Z_{C1} = \frac{AZ_{C2} + B}{CZ_{C2} + D} = \left| Z_{C2} = \frac{DZ_{C1} + B}{CZ_{C1} + A} \right| = \frac{A \frac{DZ_{C1} + B}{CZ_{C1} + A} + B}{C \frac{DZ_{C1} + B}{CZ_{C1} + A} + D} = \frac{(AD + BC)Z_{C1} + 2AB}{(AD + BC) + 2CDZ_{C1}};$$

$$(AD + BC)Z_{C1} + 2CDZ_{C1}^2 = (AD + BC)Z_{C1} + 2AB; \quad Z_{C1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}};$$



$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}; Z_{C2} = \sqrt{\frac{DB}{CA}}; \quad \text{или} \quad Z_{C1} = \sqrt{z_{1X} \cdot z_{1K}} \quad z_{C2} = \sqrt{z_{2X} \cdot z_{2K}};$$

$$\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}} = \frac{A}{D}; Z_{C1} \cdot Z_{C2} = \frac{B}{C}.$$

Для симметричного четырехполюсника будем иметь:

$$Z_{C1} = Z_{C2} = Z_C = \sqrt{\frac{B}{C}}.$$

Если четырехполюсник содержит только реактивные элементы, то коэффициенты  $B$  и  $C$  мнимые. При этом характеристическое сопротивление такого четырехполюсника может быть или действительным, или чисто мнимым (если  $B$  и  $C$  имеют противоположные знаки).

### Коэффициент распространения (передачи) четырехполюсника (постоянная передачи; мера распространения)

Коэффициент распространения четырехполюсника характеризует процесс передачи энергии от входа на выход в согласованном режиме. Для схемы, приведенной на рис.46, можем записать:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = Z_{C2} \dot{I}_2; & \dot{U}_1 \dot{I}_1 = e^{2g}, \\ \dot{U}_1 = Z_{C1} \dot{I}_1; & \dot{U}_2 \dot{I}_2 \end{cases},$$

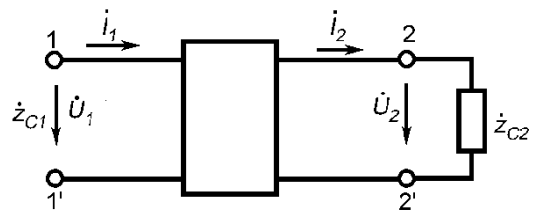


Рис.46

где  $g$  - коэффициент распространения.

$$g = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{C1}}{Z_{C2}} \left( \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{Z_{C2}}{Z_{C1}} \right) \left( \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right)^2$$

$$g = \ln \left( \frac{\dot{I}_1 \sqrt{Z_{C1}}}{\dot{I}_2 \sqrt{Z_{C2}}} \right) = \ln \left( \frac{\dot{U}_1 \sqrt{Z_{C2}}}{\dot{U}_2 \sqrt{Z_{C1}}} \right); \quad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}} e^g; \quad \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} e^g.$$

Параметры  $g$ ,  $Z_{C1}$ ,  $Z_{C2}$  называют характеристическими (вторичными) параметрами четырехполюсника.

Если четырехполюсник симметричный то  $Z_{C1} = Z_{C2} = Z_C$ , т.е. для описания такого четырехполюсника достаточно двух параметров  $g$  и  $Z_C$ . При этом:

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = e^g.$$

Пусть:

$$\dot{U}_1 = U_1 e^{j\varphi_{U1}}; \dot{U}_2 = U_2 e^{j\varphi_{U2}}; \dot{I}_1 = I_1 e^{j\varphi_{I1}}; \dot{I}_2 = I_2 e^{j\varphi_{I2}}.$$

Тогда:

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{I_1}{I_2} e^{j(\varphi_{I1} - \varphi_{I2})} = \frac{U_1}{U_2} e^{j(\varphi_{U1} - \varphi_{U2})} = e^\alpha e^{j\beta};$$

$$g = \alpha + j\beta; \quad e^\alpha = \frac{I_1}{I_2} = \frac{U_1}{U_2}; \quad \beta = \varphi_{I_1} - \varphi_{I_2} = \varphi_{U_1} - \varphi_{U_2},$$

где  $\alpha$  – коэффициент затухания, который характеризует изменение действующего значения напряжения или тока при прохождении через четырехполюсник в согласованном режиме;  $\beta$  – коэффициент фазы, который показывает как изменилась фаза напряжения или тока при прохождении через четырехполюсник в согласованном режиме.

Коэффициент затухания принято выражать в беллах [Б], или децибеллах [дБ].

Если полная мощность на выходе четырехполюсника в 10 раз меньше, чем мощность на его входе, то затухание составляет 1 Б, если в 100 раз - 2 Б и так далее. Поэтому  $\alpha_B = \lg(S_1 / S_2)$ .

В случае согласованного симметричного четырехполюсника:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 \Rightarrow \alpha_B = 2\lg \frac{U_1}{U_2} = 2\lg \frac{I_1}{I_2}.$$

Децибел единица затухания в 10 раз меньшая чем бел то есть:

$$\alpha_{дБ} = 20\lg \frac{U_1}{U_2} = 20\lg \frac{I_1}{I_2}.$$

### Виды соединений четырехполюсников

Для определения связи между входными и выходными величинами различными способами соединенных четырехполюсников, формы записи уравнений выбирают, исходя из удобства получения матрицы сложного четырехполюсника.

#### Последовательное соединение

Последовательное соединение двух четырехполюсников показано на рис.47. Для такого соединения справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} + \dot{U}_{1b}; \\ \dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} + \dot{U}_{2b}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} = \dot{I}_{1b}; \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_{2a} = \dot{I}_{2b}; \end{cases}$$

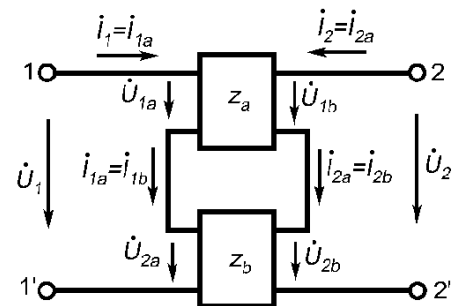


Рис.47

Независимые переменные - токи, а зависимые напряжения, т.е. удобно использовать Z - форму уравнений. Тогда:  $\dot{U}_a = z_a \dot{I}_a$ ;  $\dot{U}_b = z_b \dot{I}_b$ .

$$\dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} + \dot{U}_{1b} \\ \dot{U}_{2a} + \dot{U}_{2b} \end{bmatrix} = \dot{U}_a + \dot{U}_b = z_a \dot{I} + z_b \dot{I} = [z_a + z_b] \dot{I};$$

$$\dot{U} = z\dot{I}; \quad \dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}; \quad \dot{I} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}; \quad z = \begin{bmatrix} a & b & a & b \\ z_{11} + z_{11} & z_{12} + z_{12} & & \\ a & b & a & b \\ z_{21} + z_{21} & z_{22} + z_{22} & & \end{bmatrix}.$$

Матрица четырехполюсника:

$$Z = Z_a + Z_b.$$

### Параллельное соединение четырехполюсников

Схема параллельного соединения четырехполюсников приведена на рис.48.

$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} = \dot{U}_{1b}$ ;  $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} = \dot{U}_{2b}$  - независимые;

$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1b}$ ;  $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2a} + \dot{I}_{2b}$  - зависимые.

Удобной будет Y- форма уравнений:

$$\dot{I}_a = Y_a \dot{U}_a; \quad \dot{I}_b = Y_b \dot{U}_b; \quad \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y} \dot{\mathbf{U}}.$$

Тогда можно записать:

$$\dot{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1b} \\ \dot{I}_{2a} + \dot{I}_{2b} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{I}}_a + \dot{\mathbf{I}}_b = Y_a \dot{\mathbf{U}} + Y_b \dot{\mathbf{U}} = [Y_a + Y_b] \dot{\mathbf{U}}; \quad \mathbf{Y} = \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b.$$

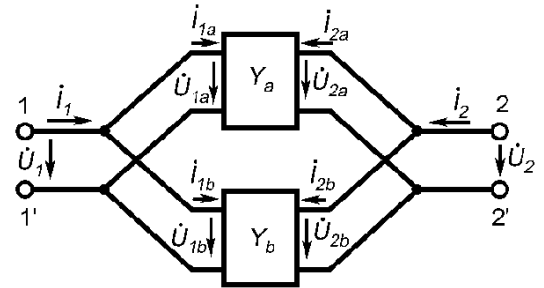


Рис.48

Аналогично можно определить соотношение для последовательно-параллельного, параллельно-последовательного и каскадного соединений (рис.49, а - в).

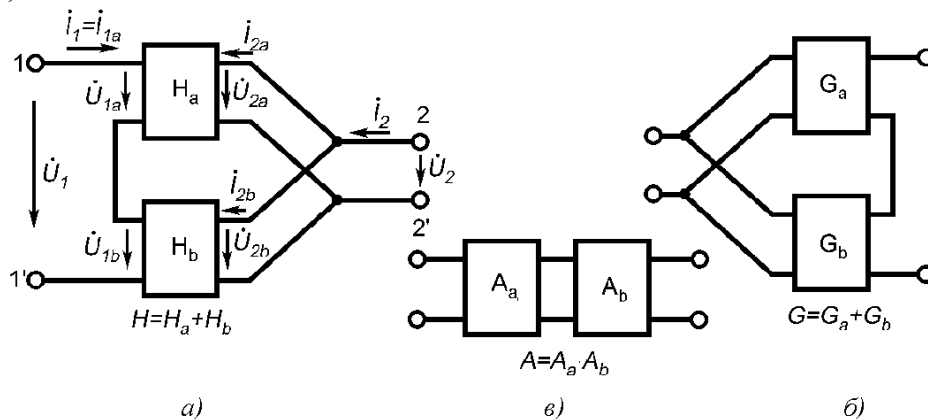


Рис.49

Для каскадного соединения четырехполюсников, перемножаемые матрицы записывают в порядке следования соответствующих четырехполюсников, потому что операция умножения матриц некоммутативна.

Каскадное соединение четырехполюсников с согласованными характеристическими сопротивлениями может быть заменено одним

четырёхполюсником, характеристические сопротивления которого равны входному характеристическому сопротивлению первого и выходному характеристическому сопротивлению последнего четырёхполюсника (рис.50).

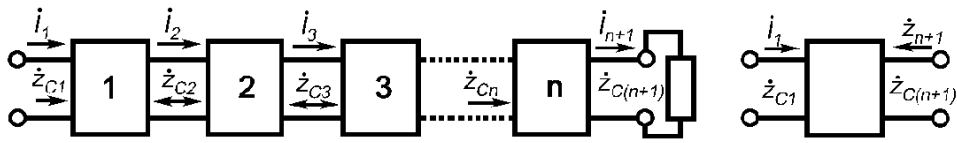


Рис.50

Коэффициент распространения эквивалентного четырёхполюсника равен сумме коэффициентов распространения отдельных четырёхполюсников:

$$g = \sum g_i .$$

Такое соединение называется согласованной цепной схемой соединения четырёхполюсников.

Если цепная схема составлена из одинаковых симметричных четырёхполюсников, то она называется однородной симметричной цепной схемой. Для этого случая:

$$z_{C1} = z_{C2} = \dots = z_{Cn} = z_C; \quad g_1 = g_2 = \dots = g_n = g; \quad g_o = ng .$$

Рассмотренные виды различных соединений четырёхполюсников справедливы, если выполняется условие регулярности соединения отдельных четырёхполюсников. Для регулярного соединения матрица каждого четырёхполюсника должна оставаться такой же, которой она была до соединения четырёхполюсников (т.е. параметры отдельных четырёхполюсников не меняются).

Рассмотрим примеры:

При соединении рис.51,а сопротивления  $z'_1$  и  $z'_3$  второго четырёхполюсника соединяются параллельно, что меняет его Z-параметры.

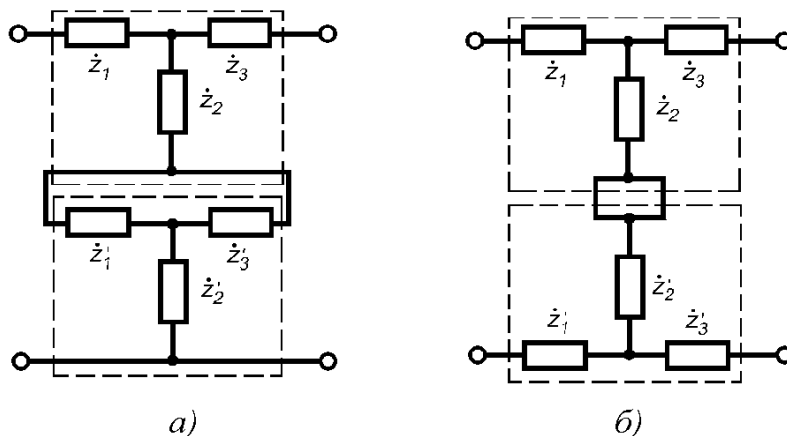


Рис.51

Для получения регулярного соединения четырёхполюсники нужно включать так, как показано на рис.51,б.

Второй пример: соединение  $\Pi$ -образной и  $T$ -образной схем (рис.52,а) будет нерегулярным, т.к. элемент  $\dot{Y}_2$  закорачивается. Правильное соединение показано на рис.52,б.

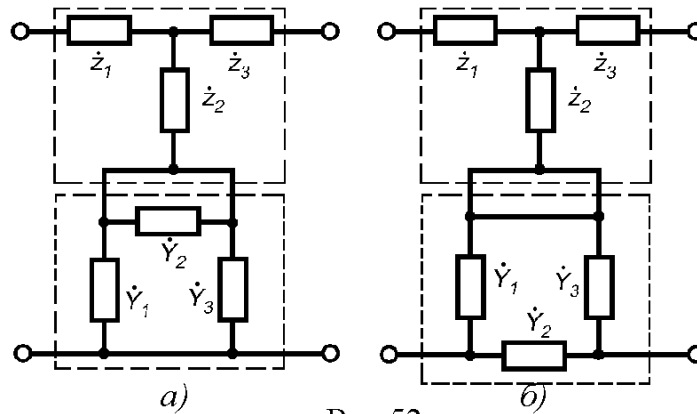


Рис.52

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

В зависимости от режима работы и характера цепи ЭДС генераторов, напряжения и токи могут в большей или меньшей степени отличаться от синусоидальных. Напряжения и токи в цепи будут несинусоидальными, если синусоидальные источники ЭДС, подключенные к цепи имеют различные частоты. Даже когда ЭДС имеет синусоидальную форму, при наличии в цепи нелинейного элемента форма кривой тока может резко отличаться от синусоиды.

Пример: однополупериодный выпрямитель (рис.53)

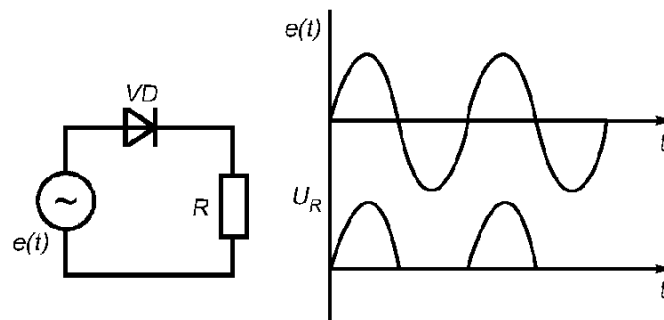


Рис.53

Таким образом, во многих электротехнических и электронных устройствах несинусоидальные напряжения и токи являются обычным явлением, т.е. нормальным рабочим режимом.

Кроме расчета токов и напряжений в электрической цепи при несинусоидальных токах часто необходимо знать гармонический состав или степень отклонения от синусоиды того или иного сигнала.

Пусть заданная периодическая несинусоидальная функция времени с периодом  $T$ :  $f(t) = f(t + T)$ . Будем считать, что функция  $f(t)$  кусочно-непрерывная на периоде (может иметь разрывы первого рода, т.е. имеет конечные значения справа и слева от точки разрыва) и имеет конечное количество минимумов и

максимумов. Таким образом, она удовлетворяет условиям Дирихле. Токи и напряжения в реальных электрических цепях удовлетворяют этим условиям.

Периодическая несинусоидальная функция, которая удовлетворяет условиям Дирихле, может быть представлена в виде бесконечного гармонического ряда Фурье. Сумма этого ряда совпадает со значениями функции  $f(t)$  для всех точек непрерывности этой функции, а в точках разрыва дает среднее арифметическое левого и правого предельных значений  $f(t)$ , то есть:

$$\frac{1}{2}[f(t_-) + f(t_+)].$$

### Ряд Фурье в тригонометрической форме

Ряд Фурье в тригонометрической форме записывают в виде:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega t dt .$$

$a_0/2$  - постоянная составляющая, которая является средним значением функции  $f(t)$  за период (определяется для  $n = 0$ );  $a_n, b_n$  - амплитуды косинусных и синусных членов ряда Фурье.

Синусная и косинусная составляющие с угловой частотой  $\omega$  образуют первую (основную) гармонику.

Коэффициенты ряда не зависят от момента времени  $t_0$ , который может быть выбран произвольно. Будем считать, что  $t_0 = 0$  и введем новую переменную  $\vartheta = \omega t$ . Тогда можно записать:

$$f(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) ;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta ;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \sin n\vartheta d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \sin n\vartheta d\vartheta .$$

Если принять  $a_n = F_n \sin \psi_n$ ;  $b_n = F_n \cos \psi_n$ , то  $f(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\vartheta + \psi_n)$ .

где  $F_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ;  $\psi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}$ ;  $\psi_n$  определяется с учетом знаков коэффициентов  $a_n, b_n$ . Если  $b_n < 0$  нужно прибавить  $\pi$ .

Такая форма представления удобна, если нужно определить процентное содержание каждой гармоники.

Совокупность гармонических составляющих, которые входят в ряд Фурье, называется частотным спектром сигнала (рис.54).

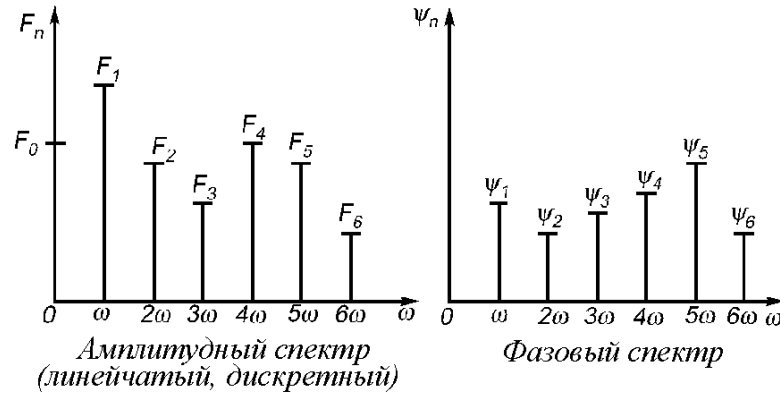


Рис.54

### Графоаналитический метод разложения в ряд Фурье

Это приближенный метод численного интегрирования. Его используют, когда необходимо определить гармонический состав несинусоидальной функции сложной формы (или табличной функции). При этом вычисление определенного интеграла заменяется вычислением суммы конечного числа слагаемых. Период функции  $f(\vartheta)$ , равный  $2\pi$ , разбивается на  $m$  одинаковых интервалов  $\Delta\vartheta$  так, чтобы  $m \cdot \Delta\vartheta = 2\pi$  (рис.55). Обычно  $m = 12, 18, 24, 36, 48 \dots$

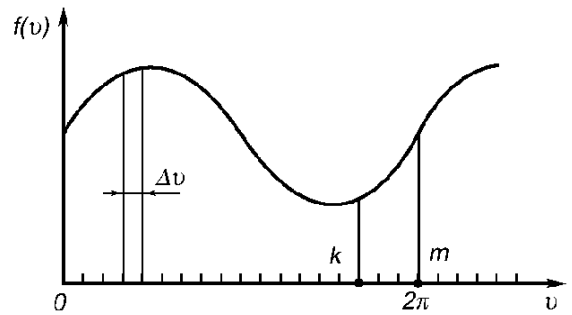


Рис.55

Расстояние от начала координат до

середины  $k$ -го интервала будет определяться соотношением:  $g_k = \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{m}$ .

Пусть значение периодической несинусоидальной функции в точке  $g_k$  будет равно  $f(g_k)$ . Коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам:

$$a_n \cong \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m f(g_k) \cos(n g_k) \cdot \Delta\vartheta = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m f(g_k) \cos \left[ n \left( k - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{m} \right];$$

$$b_n \cong \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m f(g_k) \sin(n g_k) \cdot \Delta\vartheta = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m f(g_k) \sin \left[ n \left( k - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{m} \right].$$

Если на периоде есть точки разрыва, то при выбранном способе задания  $g_k$ , целесообразно разбивать период на такие интервалы, чтобы точки разрыва не попадали на их середину. Если брать значение функции  $f(g_k)$  в начале или в конце интервалов  $\Delta\vartheta$ , то для случая четной функции в разложении будут присутствовать как косинусоиды, так и синусоиды, которых четная функция не содержит.

## Влияние симметрии формы периодической кривой на ее гармонический состав

В большинстве случаев несинусоидальные ЭДС, напряжения и токи имеют какой-нибудь вид симметрии. Это значительно облегчает их разложение в ряд Фурье. Рассматривают такие виды симметрии:

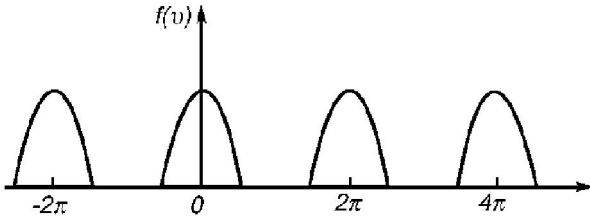


Рис.56

1. Функция  $f(\vartheta)$  симметрична относительно оси ординат (четная функция), т.е.  $f(-\vartheta) = f(\vartheta)$  (рис.56).

Так как синусные составляющие любых частот есть нечетные функции, то они не входят в состав ряда, а поэтому ряд содержит только постоянную составляющую и косинусоиды:

$$f(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\vartheta.$$

Т.е. четная функция содержит только косинусоиды и постоянную составляющую. При этом для определения коэффициентов  $a_n$  пользуются

формулой:  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta$ . Это вытекает из того, что:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta &= \int_{-\pi}^0 f(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta + \int_0^{\pi} f(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta = \\ &= \int_{\pi}^0 f(-\vartheta) \cos n(-\vartheta) d(-\vartheta) + \int_0^{\pi} f(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta = 2 \int_0^{\pi} f(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

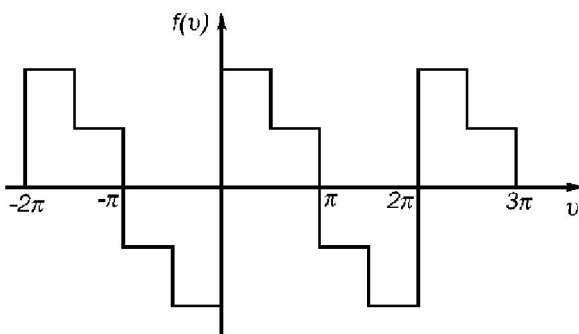


Рис.57

2. Функция  $f(\vartheta)$  симметрична относительно начала координат (нечетная функция), т.е.  $f(-\vartheta) = -f(\vartheta)$  (рис.57).

Так как постоянная составляющая и косинусоиды этому условию не удовлетворяют, то в разложении могут быть только синусоидальные составляющие, т.е.:

$$f(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\vartheta.$$

При этом:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\vartheta) \sin n\vartheta d\vartheta.$$

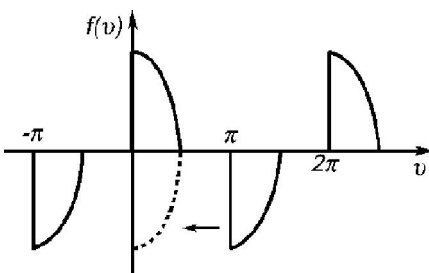


Рис.58

3. Функция  $f(\vartheta)$  симметричная относительно оси абсцисс при совмещении двух полупериодов во времени (рис.58), т.е.  $f(-\vartheta) = -f(\vartheta + \pi)$  (антипериодическая функция).



Для такого вида симметрии можно записать:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) = -\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(\vartheta + \pi) + b_n \sin n(\vartheta + \pi)].$$

Для четных  $n$ : 
$$a_0 + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) = 0.$$

Для произвольных значений  $\vartheta$  это условие выполняется только тогда, когда  $a_0 = a_n = b_n = 0$ . Таким образом, для такого вида симметрии:

$$f(\vartheta) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta);$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\vartheta) \cos n\vartheta \, d\vartheta; \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\vartheta) \sin n\vartheta \, d\vartheta.$$

Функция симметричная относительно оси абсцисс при совмещении двух полупериодов содержит только нечетные гармоники.

Если одновременно выполняются условия симметрии по пунктам 1 и 3, то в разложении будут только нечетные косинусоиды.

Допустим, что функция, содержащая только нечетные косинусоиды, отвечает условию  $f(\vartheta) = -f(\pi - \vartheta)$ . Так как для нечетных значений  $n$   $\cos n\vartheta = -\cos n(\pi - \vartheta)$ , то:

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\vartheta) \cos n\vartheta \, d\vartheta.$$

Если функция, которая содержит только нечетные синусоиды, отвечает условию  $f(\vartheta) = f(\pi - \vartheta)$ , то с учетом того, что для нечетных значений  $n$   $\sin n\vartheta = \sin n(\pi - \vartheta)$ , то:

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\vartheta) \sin n\vartheta \, d\vartheta.$$

Виды симметрии зависят от выбора начала отсчета. Если начало отсчета может быть выбрано произвольно, то выбирать его целесообразно так, чтобы было больше всего совпадений различных случаев симметрии.

### Перенос начала отсчета

Пусть для некоторой периодической несинусоидальной функции  $f(\vartheta)$  известны коэффициенты ряда Фурье  $a_n$  и  $b_n$ . Тогда функцию  $f(\vartheta)$  можно представить в виде:

$$f(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta).$$

Если сдвинуть начало отсчета на некоторый отрезок  $\beta$  вправо или влево относительно исходного начала координат, то разложение в ряд Фурье с учетом переноса начала отсчета можно получить заменой  $\vartheta$  на  $\vartheta_1 + \beta$ , где  $\vartheta_1$  – абсцисса в новой системе координат. Положительное значение  $\beta$  соответствует сдвигу нового начала отсчета вправо, а отрицательное – влево.

$$f(\vartheta_1 + \beta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n(\vartheta_1 + \beta) + b_n \sin n(\vartheta_1 + \beta)).$$

Приведенная формула позволяет легко находить разложение в ряд Фурье функции, если известны коэффициенты ряда Фурье для другой функции, которая получается в результате сдвига исходной функции по оси абсцисс.

### Комплексная форма ряда Фурье

В соответствии с формулами Эйлера:

$$\cos n\vartheta = \frac{e^{jn\vartheta} + e^{-jn\vartheta}}{2}; \quad \sin n\vartheta = \frac{e^{jn\vartheta} - e^{-jn\vartheta}}{2j}.$$

Тогда можно записать:

$$a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta = \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\vartheta} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\vartheta},$$

а ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\vartheta} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\vartheta} \right).$$

По определению  $a_n$  – четно, а  $b_n$  – нечетно относительно  $n$ , т.е.  $a_n = a_{-n}$ ;  $b_n = -b_{-n}$ .

С учетом того, что:

$$\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\vartheta} = \frac{a_0}{2} \quad \text{при } n = 0,$$

можно записать:

$$f(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\vartheta} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\vartheta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\vartheta} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{F}_n e^{jn\vartheta} \quad (*),$$

где  $\dot{F}_n$  – комплексный коэффициент

$$\dot{F}_n = a_n - jb_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) e^{-jn\vartheta} d\vartheta, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Комплексные изображения синусоидальных функций (комплексные амплитуды) связаны с коэффициентами комплексной формы для ряда Фурье. Рассмотрим функцию  $e(t) = E_m \sin \omega t$ . Ее можно представить в виде:

$$E_m \sin \omega t = \text{Im} [\dot{E}_m e^{j\omega t}] \quad \text{или}$$

$$E_m \sin \omega t = \frac{1}{2} [\dot{F}_1 e^{j\omega t} + \dot{F}_{-1} e^{-j\omega t}].$$

Это сумма членов ряда Фурье для  $n = 1$ .

Учитывая, что сумма двух сопряженных членов равна их удвоенной действительной части, будем иметь:

$$\text{Im}[E_m \dot{e}^{j\omega t}] = \text{Re}[F_1 \dot{e}^{j\omega t}], \text{ или } \text{Re}[-j E_m \dot{e}^{j\omega t}] = \text{Re}[F_1 \dot{e}^{j\omega t}].$$

Отсюда вытекает:

$$\dot{E}_m = j F_1.$$

Так как  $\vartheta = \omega t$ , то ряд (\*) - это два бесконечных ряда сопряженных относительно действительной оси векторов, которые вращаются в противоположные стороны с угловой скоростью  $n\omega$ . Геометрическая сумма каждой пары сопряженных векторов дает только действительное значение.

На рис.59 изображена синусоидальная функция, как сумма двух сопряженных векторов, которые вращаются с угловой скоростью  $n\omega$  в противоположные стороны.

В результате суммирования двух бесконечных рядов сопряженных векторов получается действительная функция  $f(t)$ .

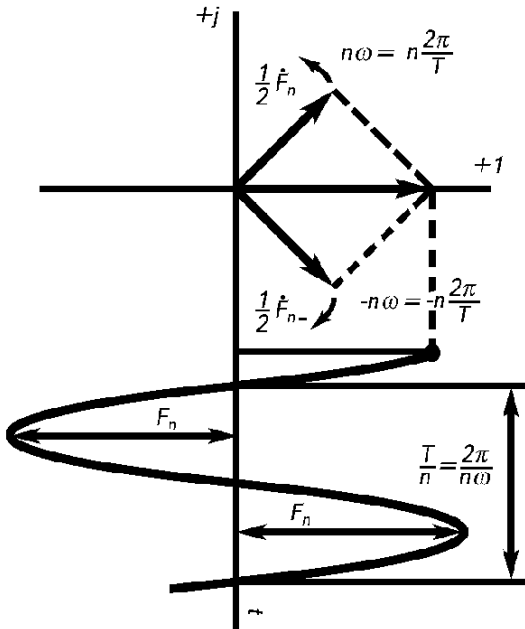


Рис.59

### Применение ряда Фурье для расчета периодического несинусоидального процесса

Пусть нужно найти ток в электрической цепи при действии периодической несинусоидальной ЭДС:

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_{m_n} \sin(n\omega \cdot t + \psi_n),$$

где  $E_{m_n}$  – амплитуда  $n$ -той гармоники.

Если цепь линейна, т.е. параметры  $R, L, M, C$  неизменны, то ток в цепи можно найти методом наложения, суммируя токи, которые создаются каждой из составляющих ЭДС  $e(t)$  в отдельности:

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{m_n} \sin(n\omega t + \psi_n - \varphi_n),$$

где  $I_0 = \frac{E_0}{z(0)}$ ;  $I_{m_n} = \frac{E_{m_n}}{Z(n\omega)}$ ;  $z(0)$  – сопротивление цепи постоянному току;

$z(n\omega)$  – полное сопротивление цепи на частоте  $n\omega$ .

Угол  $\varphi_n$  определяется как арктангенс отношения реактивного сопротивления цепи к активному сопротивлению на частоте  $n\omega$ .

В том случае, когда цепь состоит из последовательно соединенных элементов  $R$ ,  $L$ ,  $C$  полное сопротивление и фазовый угол нагрузки будут равны:

$$Z(n\omega) = \sqrt{R^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2}; \quad \varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{n\omega L - 1/n\omega C}{R}.$$

Очевидно, что для  $\omega = 0$   $z(0) \rightarrow \infty$  т.е. постоянный ток по цепи не проходит ( $C$  - раздельный конденсатор).

С повышением номера гармоники индуктивное сопротивление цепи  $n\omega L$  растет прямолинейно, а емкостное сопротивление  $1/n\omega C$  спадает по гиперболе. Поэтому в цепи с последовательно соединенными  $R$  и  $L$  высшие гармоники тока выражены слабее, чем в ЭДС источника питания, т.е. индуктивность сглаживает кривую тока, приближая ее к синусоидальной. При последовательном соединении  $R$  и  $C$ , наоборот, высшие гармоники тока могут достигать значений больших чем в ЭДС источника.

В смешанной индуктивно-емкостной цепи может наблюдаться явление резонанса для  $n$ -той гармоники, т.е.  $n\omega L = 1/n\omega C$ . Такие цепи используют как резонансные фильтры (рис.60).

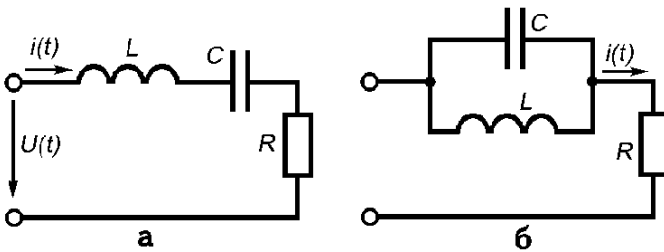


Рис.60

На сопротивлении  $R$  (рис.60, а) в идеальном случае будет выделяться только  $n$ -я гармоника, а все другие проходить не будут.

В цепи рис.60,б в нагрузку (сопротивление  $R$ ) проходят все гармоники за исключением  $n$ -той, для которой сопротивление  $LC$ -

контур будет бесконечно велико. Это так называемый фильтр-«пробка».

В более сложных цепях возможно подавление гармоник с определенными номерами (селективные фильтры).

Расчет сложных цепей при несинусоидальных воздействиях обычно проводят в комплексной форме. При этом ЭДС, токи и напряжения представляют в виде:

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_{m_n} \sin(n\omega t + \varphi_n) \Rightarrow E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{E}_{m_n},$$

где  $\dot{E}_{m_n} = E_{m_n} e^{j\varphi_n}$ .

Комплексная форма расчета периодического несинусоидального тока (напряжения) состоит в нахождении комплексных изображений токов (напряжений), которые соответствуют заданным комплексным изображениям ЭДС для различных значений  $n$  (различных гармоник).

Необходимо помнить, что в общем случае в цепи, содержащей  $R$ ,  $L$ ,  $C$ -элементы, реактивное и активное сопротивления цепи являются функциями частоты  $n\omega$ .

Для каждой отдельной гармоники можно построить векторную диаграмму. Однако откладывать на векторной диаграмме токи и напряжения различных частот, а тем более суммировать векторы для различных частот недопустимо, потому что угловые скорости вращения этих векторов разные. Это очень существенная ошибка.

**Суммировать можно только мгновенные значения, но ни в коем случае не комплексные изображения !!!**

Подчеркнем, что ряд Фурье дает только приближенное значение искомых величин, т.к. учитывается только конечное количество составляющих (в большинстве случаев не больше пяти). Точное значение в общем случае получается в виде бесконечного ряда. Существуют специальные (операторные) методы расчета (отдельных составляющих; разностных уравнений и др.), которые позволяют получить решение в замкнутой форме (конечного количества составляющих).

### Действующее и среднее значения периодической несинусоидальной функции

Действующее значение периодической несинусоидальной функции определяются по формуле:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}.$$

Пусть  $i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_m \sin(n\omega t + \varphi_n)$ . После возведения в квадрат  $i(t)$

интеграл можно записать в виде суммы интегралов вида:

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 dt = I_0^2 \text{ - квадрат постоянной составляющей;}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_{m_n}^2 \sin^2(n\omega t + \varphi_n) dt = \frac{I_{m_n}^2}{2} = I_n^2 \text{ - квадрат действующего значения } n \text{ - той}$$

гармоники;

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2I_0 I_{m_n} \sin(n\omega t + \varphi_n) dt = 0; \quad \frac{1}{T} \int_0^T 2I_{m_n} \sin(n\omega t + \varphi_n) I_{m_k} \sin(k\omega t + \varphi_k) dt = 0, \quad n \neq k.$$

$$\text{Тогда будем иметь: } I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}$$

Действующее значение периодической несинусоидальной функции равно квадратному корню из суммы квадратов действующих значений всех гармоник и постоянной составляющей:

$$I = \sqrt{\sum_{K=0}^{\infty} I_K^2}; \quad U = \sqrt{\sum_{K=0}^{\infty} U_K^2}; \quad E = \sqrt{\sum_{K=0}^{\infty} E_K^2}.$$

Среднее по модулю значение:

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt .$$

Если функция симметрична относительно оси абсцисс при совмещении полупериодов и не изменяет знак на полупериоде, то:

$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^T i(t) dt .$$

Начало отсчета нужно выбирать так, чтобы  $f(0) = 0$ .

Если за весь период функция не меняет своего знака, то  $I_{cp} = I_0 = a_0/2$ .

### Мощность в цепи периодического несинусоидального тока

Активная мощность определяется как среднее за период значение мгновенной мощности цепи:  $P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt$ .

Подставим вместо  $u(t)$  и  $i(t)$  их выражения в форме ряда Фурье. Тогда получим сумму интегралов такого вида:  $\frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt = U_0 I_0$ ;

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_{m_k} \sin(k\omega t + \psi_k) I_{m_k} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) dt = U_k I_k \cos \varphi_k - \text{активная мощность}$$

$k$  - той гармоники.

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_0 U_{m_k} \sin(k\omega t + \psi_k) dt = 0; \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_{m_k} \sin(k\omega t + \psi_k) I_{m_l} \sin(l\omega t + \psi_k - \varphi_l) dt = 0 .$$

Таким образом,  $P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} P_k$ .

Активная мощность в цепи периодического несинусоидального тока равна сумме активных мощностей всех гармоник и постоянной составляющей.

Реактивная мощность в цепи несинусоидального тока определяется как сумма реактивных мощностей всех гармоник:

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k .$$

Если одна из кривых (напряжение или ток) содержит гармоники, которых нет во второй кривой, то это не отражается на величине активной и реактивной мощности, но увеличивает действующее значение функции, которая содержит эти гармоники. Если полную мощность цепи определять, как произведение действующих значений напряжения и тока  $S = UI$ , то  $S^2 \geq P^2 + Q^2$ . Причем равенство может быть только для чисто активной цепи при  $Q = 0$ .

В общем случае  $P^2 + Q^2 = S^2 - T^2$  или  $S^2 = P^2 + Q^2 - T^2$ , где  $T$  - мощность искажения, которая характеризует степень отличия в формах кривых  $u(t)$  и  $i(t)$ .

Коэффициент мощности определяется соотношением:  $K_P = \frac{P}{S} = \frac{P}{UI}$ .

Обычно  $K_P < 1$ . Чем ближе  $K_P$  к 1, тем лучше используется оборудование.

### Коэффициенты, характеризующие периодические несинусоидальные функции

Коэффициент амплитуды - отношения амплитудного значения к действующему значению:

$$k_a = I_m / I; \quad \text{для синусоиды } k_a = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

Коэффициент формы - отношения действующего значения к среднему по модулю значению:

$$k_f = I / I_{cp}; \quad \text{для синусоиды } k_f = \pi / 2\sqrt{2} \approx 1,11.$$

Коэффициент искажения - отношения действующего значения первой гармоники к действующему значению сигнала:

$$k_{uc} = I_1 / I; \quad \text{для синусоиды } k_{uc} = 1.$$

Коэффициент гармоник - отношения действующего значения высших гармоник к действующему значению первой гармоники:

$$k_{\Gamma} = \frac{I_{B.\Gamma.}}{I_1} = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{I_1} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}}{I_1} = \frac{1}{k_{uc}} \sqrt{1 - k_{uc}^2}.$$

Коэффициент пульсаций - отношения действующего значения переменной составляющей к постоянной составляющей:

$$k_{\Pi(k)} = I_k / I_0 \quad \text{- коэффициент пульсаций по } k \text{-той гармонике.}$$

### Величины, измеряемые амперметрами и вольтметрами при несинусоидальных токах

Приборы электромагнитной, электродинамической и тепловой систем реагируют на действующие значения токов и напряжений.

Условные обозначения этих приборов приведены на рис.61:



Рис.61

Магнитоэлектрические приборы измеряют постоянную составляющую. Их обозначения показаны на рис.62.



Рис.62

Магнитоэлектрический прибор с выпрямителем измеряет среднее по модулю значение сигнала (прибор может быть проградуирован и в действующих значениях с учетом  $I = k_{\phi} I_{cp}$ ).

Амплитудные электронные вольтметры измеряют максимальные значения сигналов.

### Эквивалентные синусоидальные напряжения и токи

При исследовании некоторых простых свойств нелинейных электрических цепей несинусоидальные токи и напряжения, не содержащие постоянных составляющих, заменяют эквивалентными синусоидами. При этом действующее значение эквивалентной синусоиды принимают равным действующему значению несинусоидального сигнала. Частота эквивалентной синусоиды равна частоте первой (основной) гармоники. Угол сдвига фаз напряжения и тока выбирают таким образом, чтобы активная мощность эквивалентной синусоиды равнялась активной мощности несинусоидального сигнала. Таким образом:

$$u_{\vartheta}(t) = \sqrt{2}U_{\vartheta} \sin \omega t; \quad i_{\vartheta}(t) = \sqrt{2}I_{\vartheta} \sin(\omega t + \varphi_{\vartheta});$$

$$U_{\vartheta} = U = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}; \quad I_{\vartheta} = I = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$$

$$S_{\vartheta} = S; \quad P_{\vartheta} = P; \quad k_p = P/UI = \cos \varphi_{\vartheta} = P_{\vartheta}/S_{\vartheta}.$$

Реактивная мощность:  $Q_{\vartheta} = U_{\vartheta} I_{\vartheta} \sin \varphi_{\vartheta}$ .

Т. к.  $S_{\vartheta}^2 = P_{\vartheta}^2 + Q_{\vartheta}^2$ ;  $S^2 = P^2 + Q^2 + T^2 \parallel P = P_{\vartheta}$ , то  $Q_{\vartheta}^2 = Q^2 + T^2$ ;  $Q_{\vartheta} = \sqrt{Q^2 + T^2}$ .

Из этого следует, что мощность искажения имеет реактивный характер.

### Высшие гармоники в трехфазных цепях

В трехфазных цепях кривые напряжений в фазах  $B$  и  $C$  со сдвигом на треть периода обычно в точности воспроизводят напряжение фазы  $A$ . Пусть напряжение фазы  $A$  описывается периодической несинусоидальной функцией  $u_A(t) = f(t)$ . Тогда  $u_B(t) = f(t - T/3)$ ,  $u_C(t) = f(t + T/3)$ , где  $T$  - период основной частоты. Рассмотрим гармонику  $k$ -го порядка функции  $f(t)$  во всех трех фазах:

$$U_{A_k}(t) = Um_k \sin(k\omega t + \psi_k); \quad U_{B_k}(t) = Um_k \sin(k\omega t + \psi_k - 2\pi k/3);$$

$$U_{C_k}(t) = Um_k \sin(k\omega t + \psi_k + 2\pi k/3); \quad \omega T = 2\pi, \quad k\omega(t - T/3) = k\omega t - 2\pi k/3.$$

Напряжения гармоник кратных трем ( $k = 3n$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) во всех фазах в любой момент времени имеют одинаковые значения и фазы. Для  $k = 3n+1$  гармоники трех фаз образуют симметричную систему напряжений



прямой последовательности, а для  $k = 3n+2$  - обратной последовательности фаз по отношению к основной гармонике с частотой  $\omega$ .

Таким образом, гармоники с номерами 1, 4, 7, 10, 13 и т. д. образуют системы напряжений прямой последовательности; гармоники с номерами 2, 5, 8, 11, 14 и т. д. - обратной последовательности, а гармоники с номерами 3, 6, 9, 12 и т.д. - нулевой последовательности.

При наличии постоянной составляющей в напряжениях каждой из фаз она может рассматриваться как нулевая гармоника порядка кратного трем ( $k = 0$ ), т.е. образующая нулевую последовательность.

В большинстве практически важных случаев в напряжениях отсутствуют как постоянные составляющие, так и все четные гармоники, а поэтому ограничимся исследованием только нечетных гармоник.

Если фазы генератора объединены звездой, то для несинусоидального фазного напряжения линейные напряжения не содержат гармоник кратных трем. При этом  $U_L < \sqrt{3}U_\phi$ . Действительно, фазное напряжение равно

$$U_\phi = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots},$$

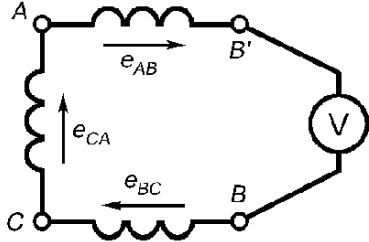
а линейное напряжение не содержит гармоник кратных трем:

$$U_L = \sqrt{3} \cdot \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots}.$$

Для равномерной нагрузки фазные токи основной частоты и все высшие гармоники, за исключением гармоник кратных трем, образуют системы прямой и обратной последовательностей и дают в сумме ноль. Гармоники порядка кратного трем образуют систему нулевой последовательности, т.е. для любого мгновения имеют одинаковые значение и направление. При этом ток в нулевом проводе равен утроенной сумме токов гармоник кратных трем, то есть:

$$I_0 = 3\sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + I_{21}^2 + \dots}.$$

При отсутствии нулевого провода токи в каждой из фаз не могут иметь гармоник порядка кратного трем, потому что в этой схеме сумма токов в любой момент времени должна равняться нулю, что невозможно при наличии системы токов нулевой последовательности. Поэтому в приемнике будут отсутствовать и напряжения нулевой последовательности (гармоники с номерами  $3k$ ). При этом между нулевыми точками генератора и симметричной нагрузки может возникать значительное напряжение, которое содержит только гармоники кратные трем.

Если фазы генератора соединены треугольником, то при несинусоидальных токах сумма ЭДС в замкнутом контуре генератора не равна нулю. Суммарное значение ЭДС будет равно утроенной сумме высших гармоник порядка  $3k$ . Если включить вольтметр в разрыв  в разрыв  $CA$  (рис.63), то он покажет напряжение

$$U = 3\sqrt{U_3^2 + U_9^2 + U_{15}^2 + U_{21}^2 + \dots}.$$

Открытый треугольник с ЭДС, содержащими высшие гармоники, применяют как утроитель частоты.

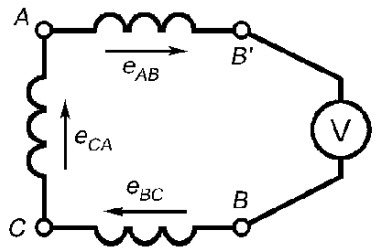


Рис.63

В замкнутом треугольнике при несинусоидальных ЭДС гармоники кратные трем вызывают внутренний ток в генераторе даже в режиме холостого хода. Но гармоники фазных ЭДС с номерами  $3k$  не появляются между выводами фаз, поскольку они компенсируются падением напряжения на внутреннем сопротивлении фазы генератора. Фазное напряжение равно линейному напряжению:

$$U_{\phi} = \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots}$$

Поэтому во внешней цепи, подключенной к генератору, обмотки которого соединены треугольником, токи не имеют гармоник кратных трем. Фазный ток генератора для симметричной нагрузки

$$I_{\phi} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots},$$

а линейный ток во внешней цепи

$$I_{\mathcal{L}} = \sqrt{3(I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots)} < \sqrt{3}I_{\phi}.$$

### Резонанс в цепи несинусоидального тока

Для несинусоидальных напряжений и токов явление резонанса усложняется, потому что возможны отдельные резонансы для гармонических составляющих. Пусть источник несинусоидального напряжения подключен к последовательному колебательному контуру (рис.64).

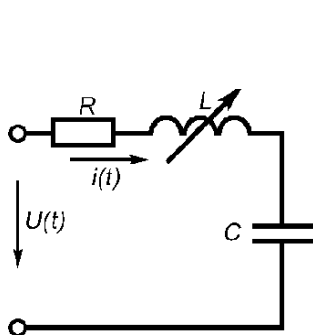


Рис.64

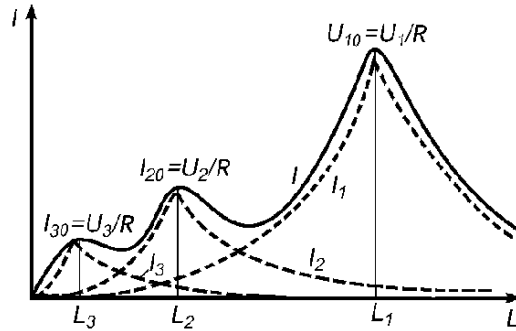


Рис.65

Ток  $k$ -той гармоники будет равен: 
$$I_k = \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}.$$

При изменении индуктивности  $L$  от нуля до бесконечности, действующее значение каждой из составляющих тока будет изменяться по резонансной кривой от начального значения:

$I_{k \text{ нач.}} = \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + (1/k\omega C)^2}}$  до резонансного  $I_{k0} = U_k/R$

для  $L = L_k = \frac{1}{k^2\omega^2 C}$ . При дальнейшем увеличении  $L$  ток будет спадать до нуля.

На рис.65 построены резонансные кривые для трех гармонических составляющих периодического несинусоидального тока.

Резонансное значение индуктивности обратно пропорционально квадрату номера гармоники:

$$L_k = \frac{1}{k^2 \omega^2 C}.$$

Кривая суммарного действующего тока будет определяться выражением:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}.$$

Для малых значений  $R$  кривая суммарного тока имеет три резко выраженных максимума, которые соответствуют резонансным значениям индуктивности.

Аналогичные зависимости получаются и при изменении емкости или частоты питающего напряжения при неизменной форме напряжения.

В цепях с несинусоидальными ЭДС и токами, резонансные явления могут применяться для выделения нужных частот, или, наоборот, для подавления нежелательных частот. Это различные виды фильтров.

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

### Назначения и типы фильтров

Под электрическими фильтрами понимают четырехполюсники (рис.66), которые включается между источниками питания и приемником (нагрузкой), предназначенные без препятствий (без затухания) пропускать в нагрузку токи одних частот и задерживать (или пропускать с большим затуханием) токи других частот.

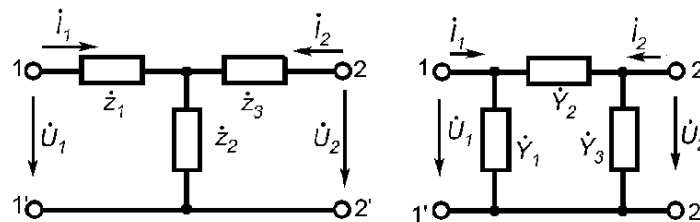


Рис.66

Диапазоны частот, которые пропускаются фильтром без затухания, называют полосой пропускания (прозрачности); диапазон частот, которые пропускаются с затуханием - полосой затухания.

Электрические фильтры обычно собирают из катушек индуктивности и конденсаторов. Используются также  $RC$ - и активные фильтры.

Рассмотрим пассивные  $LC$ -фильтры, при чем сопротивлением потерь можно пренебречь, т.е. считаем, что фильтры состоят из идеальных реактивных элементов.

Фильтры обычно собирают по симметричным  $T$ -образным или  $\Pi$ -образным схемам, т.е.  $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_3$ ;  $\dot{Y}_1 = \dot{Y}_3$ . Сопротивления  $\dot{Z}_1$ ,  $\dot{Y}_2$  условно называют продольными, а  $\dot{Z}_2$ ,  $\dot{Y}_1$  - поперечными.

Фильтры, в которых произведение продольного сопротивления на соответствующее поперечное сопротивление является постоянным числом ( $k$ ), которое не зависит от частоты, называют *k-фильтрами* (фильтры  $k$ -типа). Фильтры, в которых это произведение зависит от частоты, называют  $m$ -фильтрами.

Сопротивление нагрузки  $Z_H$ , которое подключается на выходе фильтра, должно быть согласовано с характеристическим сопротивлением фильтра  $Z_C$ .

В  $k$ -фильтрах  $Z_C$  в полосе прозрачности существенно зависит от частоты. Это вызывает необходимость изменять нагрузку  $Z_H$  в функции от частоты (особенно вблизи границ полосы прозрачности), что нежелательно.

В *m-фильтрах*, при определенных значениях коэффициента  $m$ ,  $Z_C$  мало зависит от частоты (в пределах полосы прозрачности) и нагрузка может не изменяться.

Качество фильтра тем выше, чем больше выражены его фильтрующие качества, т.е. чем более резко растет затухание в полосе затухания.

Фильтрующие качества четырехполюсников физически обусловлены возникновением в них резонансных режимов - резонансов токов или напряжений.

### Основы теории $k$ -фильтров

Для симметричного четырехполюсника в согласованном режиме справедливы соотношения:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{-g}; \dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-g}, \text{ где } g = \alpha + j\beta,$$

или

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{-\alpha} e^{-j\beta}; \dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-\alpha} e^{-j\beta}.$$

Множитель  $e^{-\alpha}$  определяет, во сколько раз модуль напряжения (тока) на выходе фильтра меньше модуля напряжения (тока) на его входе.

Если  $\alpha = 0$ , то  $e^{-\alpha} = e^0 = 1$  и фильтр пропускает сигналы без затухания. Таким образом, в полосе прозрачности  $\alpha = 0$ . В полосе затухания  $\alpha > 0$ .

Множитель  $e^{-j\beta}$ , модуль которого равен 1, свидетельствует о том, что выходное напряжение (ток) отстает по фазе от входного напряжения (тока) на угол  $\beta$ .

Для проведения анализа фильтрующих свойств четырехполюсника удобно использовать гиперболические функции.

$$sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ - гиперболический синус;}$$

$$ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ - гиперболический косинус;}$$

$$th x = \frac{sh x}{ch x} \text{ - гиперболический тангенс.}$$

Основные тождества:

$$ch^2 x - sh^2 x = 1; \quad thx \cdot cthx = 1; \quad chx = \sqrt{1 + ch^2 x}; \quad shx = \operatorname{sgn} x \sqrt{ch^2 x - 1};$$

$$sh(x + y) = shx \cdot chy + chx \cdot chy; \quad ch(x + y) = chx \cdot chy + shx \cdot shy;$$

$$sh(x - y) = shx \cdot chy - chx \cdot chy; \quad ch(x - y) = chx \cdot chy - shx \cdot shy;$$

$$shx + shy = 2sh \frac{x+y}{2} ch \frac{x-y}{2}; \quad chx + chy = 2ch \frac{x+y}{2} ch \frac{x-y}{2};$$

$$sh2x = 2shx \cdot chx; \quad ch2x = sh^2 x + ch^2 x = 1 + 2sh^2 x = 2ch^2 x - 1.$$

Будем использовать уравнения четырехполюсника в  $A$ -форме:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2. \end{cases}$$

Для симметричного четырехполюсника в согласованном режиме:

$$Z_C = \sqrt{\frac{B}{C}}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_C}; \quad A = D.$$

Тогда система уравнений может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2(A + \sqrt{BC}) \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2(A + \sqrt{BC}) \end{cases}.$$

Комплексное число  $A + \sqrt{BC} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = e^g$ .

Можно записать:  $A = chg = \frac{1}{2}(e^g + e^{-g})$ .

Действительно,  $e^{-g} = \frac{1}{A + \sqrt{BC}} = \frac{A - \sqrt{BC}}{A^2 - BC} \left\| \begin{array}{l} A^2 - BC = 1 \\ AD - BC = 1 \end{array} \right\| = A - \sqrt{BC}$ .

Отсюда  $2A = e^g + e^{-g}$ ;  $chg = A$ .

Тогда  $shg = \frac{1}{2}(e^g - e^{-g}) = \sqrt{BC}$ ;  $Z_C = \sqrt{B/C}$ ;  $B = Z_C shg$ ;  $C = \frac{shg}{Z_C}$ .

Таким образом, мы выразили первичные параметры четырехполюсника (коэффициенты  $A$ -формы) через его вторичные параметры  $Z_C$  и  $g$ . Система уравнений может быть записанная в виде:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = chg\dot{U}_2 + Z_C shg\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = \frac{shg}{Z_C}\dot{U}_2 + chg\dot{I}_2. \end{cases}$$

Фильтрующие свойства четырехполюсника проанализируем, исследуя выражение для коэффициента  $A$ :

$$A = chg = ch(\alpha + j\beta) = ch\alpha \cdot chj\beta + sh\alpha \cdot shj\beta.$$

Принимая во внимание, что:

$$chj\beta = \frac{1}{2}[e^{j\beta} + e^{-j\beta}] = \frac{1}{2}[\cos \beta + j \sin \beta + \cos \beta - j \sin \beta] = \cos \beta; \quad shj\beta = j \sin \beta,$$

получаем  $A = ch\alpha \cdot \cos \beta + jsh\alpha \cdot \sin \beta$ . Для любого фильтра собранного по  $T$ -образной схеме  $A = 1 + \dot{Z}_1 / \dot{Z}_2$ , а по  $\Pi$ -образной схеме  $A = 1 + \dot{Y}_1 / \dot{Y}_2$ .

Из каких бы реактивных сопротивлений не был собран фильтр, коэффициент  $A$  будет действительным числом. Тогда  $sh\alpha \cdot \sin \beta = 0$  и  $A = ch\alpha \cdot \cos \beta$ . Эти соотношения используются для определения границ полосы прозрачности, характера изменения угла в зоне прозрачности, а также характера изменения коэффициента затухания в полосе затухания.

Для полосы прозрачности  $\alpha = 0$ ;  $sh\alpha = sh0 = 0$ ;  $ch0 = 1$ .

Первое условие выполняется, а второе сводится к соотношению  $\cos \beta = A$ . Так как  $\cos \beta$  может изменяться в диапазоне от  $+1$  до  $-1$ , то крайние значения коэффициента  $A(\omega)$ , который является функцией частоты, в полосе прозрачности будут равны  $\pm 1$ . Полоса прозрачности в общем случае лежит в диапазоне частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ . Значение частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  для НЧ и ВЧ фильтров находят из уравнения  $A(\omega) = \pm 1$ . Для полосовых и заградительных фильтров  $\omega_1$  и  $\omega_2$  находят как корни уравнения  $A(\omega) = -1$ . Уравнение  $A(\omega) = +1$  дает возможность определить резонансную частоту  $\omega_0$ , которая находится в интервале частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ .

Частоту, которая является граничной между полосой прозрачности и полосой затухания, называют частотой среза. Характер изменения угла  $\beta$  в зависимости от  $\omega$  для полосы прозрачности определяют в соответствии с выражением  $\beta = \arccos A(\omega)$ .

В полосе затухания  $\alpha > 0$ . Тогда  $sh\alpha \cdot \sin \beta = 0$  только при условии  $\sin \beta = 0$ , т.е. если  $\beta = 0$  или  $\beta = \pm\pi$ . При  $\beta = 0$   $ch\alpha \cdot \cos \beta = ch\alpha = A(\omega)$ ; при  $\beta = \pm\pi$ ;  $ch\alpha \cdot \cos \beta = -ch\alpha = A(\omega)$   $ch\alpha = -A(\omega)$ .

Полученные соотношения позволяют по значениям  $A(\omega)$  найти  $ch\alpha$ , а затем и  $\alpha$ , т.е. найти зависимость  $\alpha(\omega)$ .

Поскольку в полосе затухания  $\beta = 0$  или  $\beta = \pm\pi$ , то напряжение  $U_2$  на выходе фильтра находится или в фазе ( $\beta = 0$ ), или в противофазе ( $\beta = \pm\pi$ ) с напряжением на входе фильтра  $U_1$ .

С изменением частоты  $\omega$  изменяются и коэффициенты четырехполюсника  $B(\omega)$  и  $C(\omega)$ , что приводит к изменению характеристического сопротивления  $Z_C = \sqrt{B/C}$ . Для того, чтобы фильтр работал на согласованную нагрузку при

изменении частоты нужно изменять и сопротивление нагрузки (только в этом случае справедливая теория фильтров, которая рассматривалась выше).

В полосе прозрачности характеристическое сопротивление фильтра  $Z_C$  всегда активное, а в полосе затухания - чисто реактивное (индуктивное или емкостное).

### НЧ и ВЧ $k$ -фильтры

Фильтрами низкой частоты (ФНЧ) называют фильтры, которые пропускают в нагрузку только низкие частоты от  $\omega_1 = 0$  до  $\omega_2$ . Их полоса затухания находится в диапазоне от  $\omega_2$  до  $\infty$ . Схемы  $T$ -образного и  $\Pi$ -образного ФНЧ приведены на рис.67, а их характеристики – на рис 68.

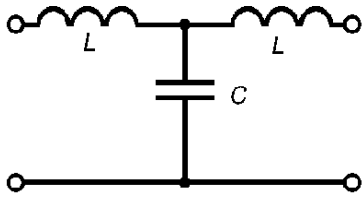


Рис.67

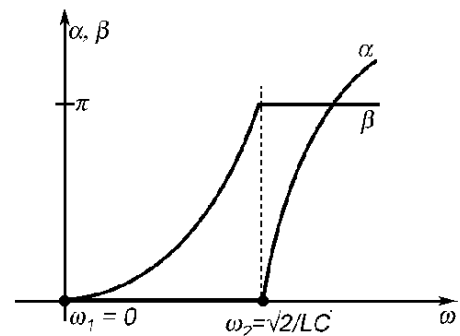
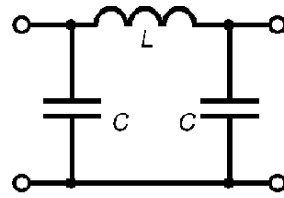


Рис.68

Фильтрами высокой частоты (ФВЧ) называют фильтры, которые пропускают в нагрузку только высокие частоты от  $\omega_1$  до  $\infty$ . Их полоса затухания находится в диапазоне от 0 до  $\omega_1$ . Схемы двух ФВЧ и их характеристики приведены на рис. 69-70.

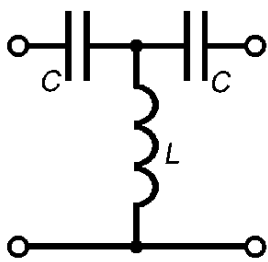


Рис.69

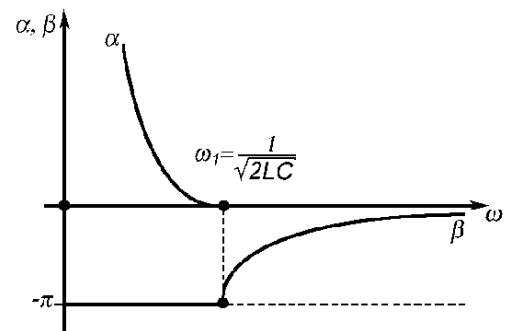
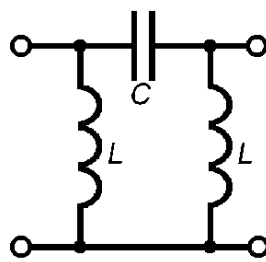


Рис.70

Для  $T$ -фильтра НЧ:

$$B = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = \left| \begin{array}{c} \dot{Z}_1^2 \\ \dot{Z}_2 \end{array} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{Z}_1^2}{\dot{Z}_2} + 2\dot{Z}_1; \quad C = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} = \left| \begin{array}{c} \dot{I}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{array} \right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{1}{\dot{Z}_2};$$

$$\dot{Z}_1 = j\omega L; \quad \dot{Z}_2 = 1/j\omega C,$$

тогда  $Z_{C_T} = \sqrt{B/C} = \sqrt{(2L/C) - \omega^2 L^2}$ . При  $\omega = \omega_1 = 0$ ,  $Z_{C_T} = \sqrt{2L/C}$ .

При повышении частоты характеристическое сопротивление  $Z_C$  уменьшается. На частоте  $\omega_2 = \sqrt{2/LC}$   $Z_C = 0$ , а потом увеличивается и при  $\omega \rightarrow \infty$   $Z_C \rightarrow \infty$  (индуктивный характер, рис.71).

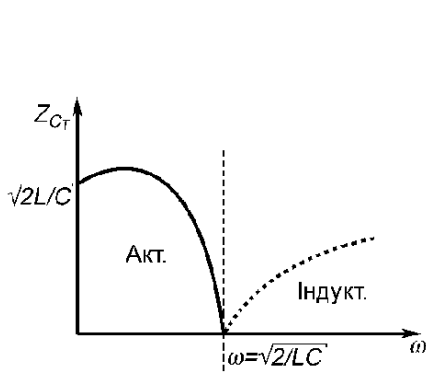


Рис.71

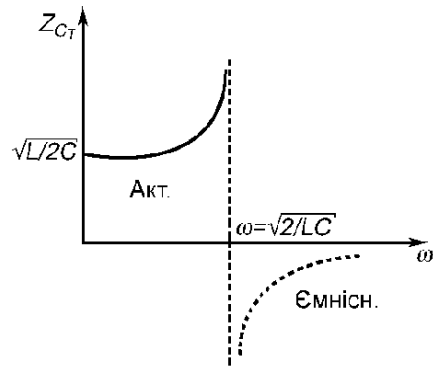


Рис.72

Для  $\Pi$  - фильтра НЧ:  $Z_{C\Pi} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2C}{L} - \omega^2 C^2}}$ . При  $\omega = 0$   $Z_{C\Pi} = \sqrt{L/2C}$ . С

увеличением частоты сопротивление увеличивается и при  $\omega_2 = \sqrt{2/LC}$   $Z_{C\Pi} \rightarrow \infty$ . При дальнейшем увеличении частоты  $Z_{C\Pi}$  уменьшается, и обращается в нуль при  $\omega \rightarrow \infty$  (емкостной характер, рис.72).

Для ФВЧ:

$$Z_{C_T} = \sqrt{\frac{2L}{C} - \omega^2 L^2}; \quad Z_{C_{\Pi}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2C}{L} - \omega^2 C^2}}; \quad \omega_1 = \sqrt{1/2LC} = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

Графики зависимостей  $Z_C(\omega)$  для ФВЧ приведены на рис.73.

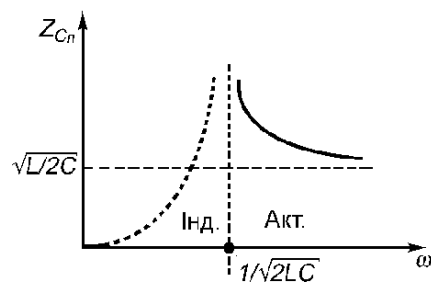
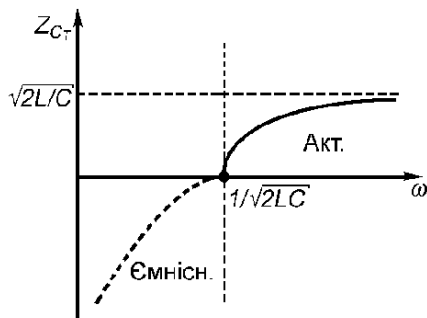


Рис.73

Если фильтр предназначен для работы на частотах, которые находятся внутри полосы прозрачности данного фильтра и относительно далеко расположенных от частоты среза, то сопротивление нагрузки для фильтров  $Z_H = \sqrt{2L/C}$  или  $Z_H = \sqrt{L/2C}$ .



## Полосовые и заградительные $k$ -фильтры

Полосовыми называются фильтры, которые пропускают в нагрузку сигналы только из узкой полосы частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ . Слева от  $\omega_1$  и справа от  $\omega_2$  находятся полосы затухания. Схема простейшего полосового  $k$ -фильтра и его характеристики показаны на рис.74.

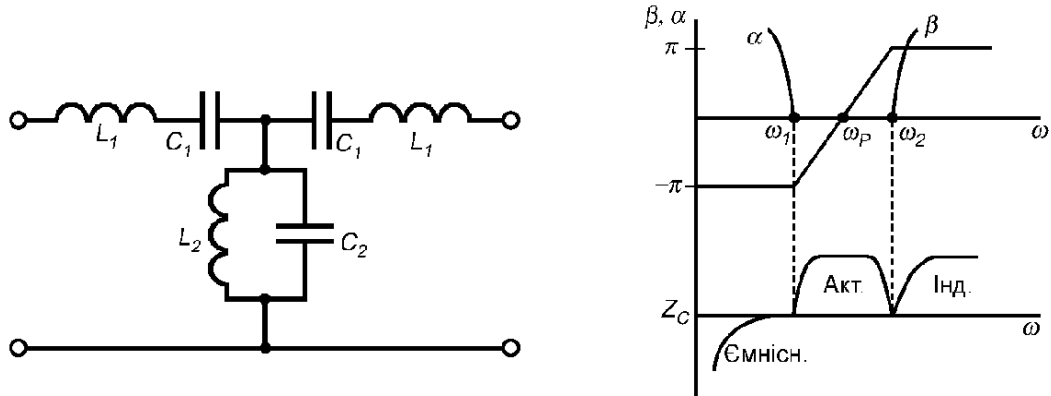


Рис.74

Параметры схемы должны удовлетворять условию  $L_1 C_1 = L_2 C_2$ . По заданным частотам  $f_1$ ,  $f_2$  и сопротивлению нагрузки фильтра  $Z_C$  можно определить параметры полосового фильтра:

$$\omega_p = 2\pi f_p; \quad f_p = \sqrt{f_1 \cdot f_2}; \quad C_1 = \frac{f_2 - f_1}{2\pi f_1 f_2 Z_C}; \quad L_1 = \frac{Z_C}{2\pi(f_2 - f_1)};$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi Z_C(f_2 - f_1)}; \quad L_2 = \frac{Z_C(f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2}.$$

Если ввести обозначения  $\omega_p = 2\pi f_p$  и  $k = \sqrt{L_1/L_2}$ , то выражения для  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $Z_C$  можно представить в виде:

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2k}} (\sqrt{1+2k} \mp 1); \quad Z_C = \sqrt{\frac{2L_2}{C_1}} \cdot \sqrt{1 - \frac{k}{2} \left( \frac{\omega_p}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2}.$$

Под заградительными фильтрами понимают фильтры, у которых полоса прозрачности как бы разрезана на две части полосой затухания. Слева от  $\omega_1$  и справа от  $\omega_2$  находятся две части полосы прозрачности. Схема такого фильтра и его характеристики показаны на рис.75.

$$L_1 C_1 = L_2 C_2; \quad \omega_{1,2} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2k}} (\sqrt{1+2k} \mp 1); \quad Z_C = \sqrt{\frac{2L_2}{C_1}} \cdot \sqrt{1 - \frac{k}{2} \left( \frac{\omega_p}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2}.$$

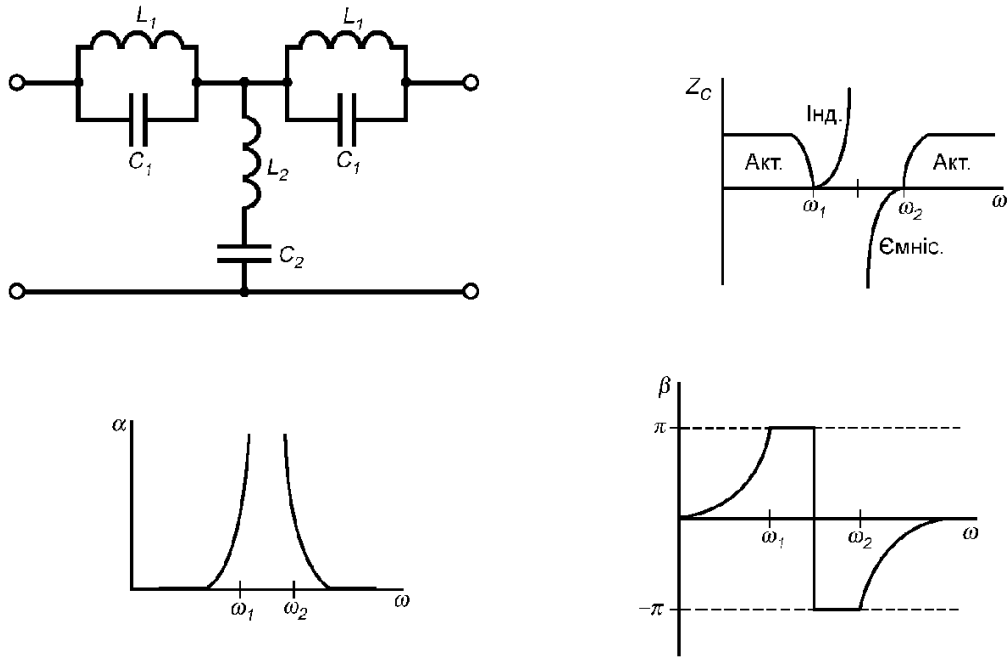


Рис.75

### Качественное определение *k*-фильтра

По схеме *k*-фильтра без проведения математического анализа можно судить о том, к какому из перечисленных типов может быть отнесен тот или иной фильтр. Вывод основывается на характере продольного сопротивления фильтра.

Характер продольного сопротивления *k*-фильтра, как правило, противоположен характеру поперечного сопротивления. Если продольное сопротивление состоит только из индуктивностей, то фильтр относится к категории НЧ. Если продольное сопротивление чисто емкостное, то фильтр относится к категории ВЧ. Если продольное сопротивление состоит из последовательного соединения *L* и *C*, то фильтр полосовой. Если продольное сопротивление состоит из параллельного соединения *L* и *C*, то это заградительный фильтр.

### Основы теории *m*-фильтров. Каскадное включение фильтров

Для повышения крутизны характеристики  $\alpha(\omega)$  в начале полосы затухания, получения заданного значения затухания при определенной частоте, а также для уменьшения зависимости  $Z_C$  от частоты в полосе прозрачности используют полувенья *m*-фильтров, которые включаются каскадно с *k*-фильтрами (рис.76,а-б).

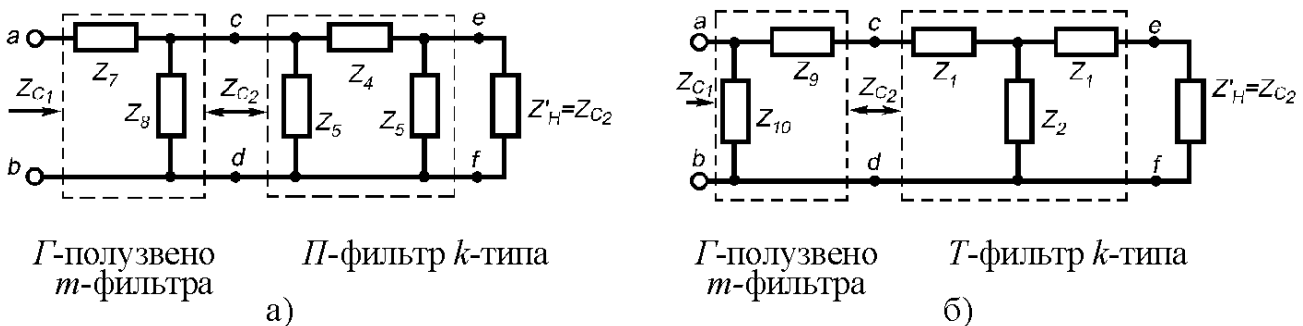


Рис.76

На практике обычно применяются схемы, в которых  $k$ -фильтр находится между двумя полузвеньями  $m$ -фильтра. Величины сопротивлений полузвеньев  $m$ -фильтров  $Z_7, Z_8, Z_9, Z_{10}$  зависят от сопротивлений  $k$ -фильтров  $Z_4, Z_5$  и  $Z_1, Z_2$ . Говорят, что  $k$ -фильтры являются прототипами каскадно-соединенных с ними полузвеньев  $m$ -типа.

Выходное сопротивление  $k$ -фильтра должно равняться сопротивлению нагрузки. В свою очередь,  $Z_{C2}$  является нагрузкой для левого полузвена  $m$ -фильтра. Полузвено  $m$ -фильтра является несимметричным четырехполюсником, который можно охарактеризовать сопротивлениями  $Z_{C1}$  и  $Z_{C2}$ . Сопротивление  $Z_{C1}$  для  $m$ -фильтра можно определить как входное сопротивление схемы, нагрузкой которой является входное сопротивление  $k$ -фильтра  $Z_{C2}$  (рис.77).

$$Z_{C1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2} = \frac{AZ_{C2} + B}{CZ_{C2} + D}.$$

Сопротивление  $Z_{C2}$  полузвена  $m$ -фильтра определяется как входное сопротивление схемы, в которой нагрузкой является  $Z_{C1}$ .

Сопротивление  $Z_{C2}$  определяется при обратной передаче сигнала (рис.78), поэтому коэффициенты  $A$  и  $D$  меняются местами.

$$Z_{C2} = \frac{\dot{U}'_1}{\dot{I}'_1} = \frac{D\dot{U}'_2 + B\dot{I}'_2}{C\dot{U}'_2 + A\dot{I}'_2} = \frac{DZ_{C1} + B}{CZ_{C1} + A}.$$

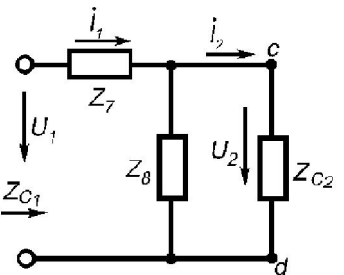


Рис.77

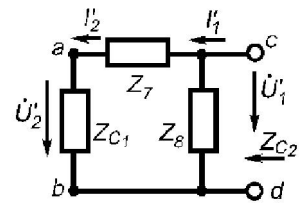


Рис.78

Решив уравнение относительно  $Z_{C1}$  и  $Z_{C2}$ , получим:

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}; \quad Z_{C2} = \sqrt{\frac{BD}{CA}}.$$

Коэффициенты  $A, B, C, D$  полузвена  $m$ -фильтра (рис.79) находим следующим образом:

$$A = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_2=0} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_1 \frac{Z_8}{Z_7 + Z_8}} = \frac{Z_7 + Z_8}{Z_7} = 1 + \frac{Z_7}{Z_8};$$

$$B = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_1 / Z_7} = Z_7;$$

$$C = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_2=0} = \frac{\dot{I}_1}{Z_8 \dot{I}_1} = \frac{1}{Z_8}; \quad D = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = 1; \quad (\text{при } \dot{U}_2=0, \dot{I}_1=\dot{I}_2).$$

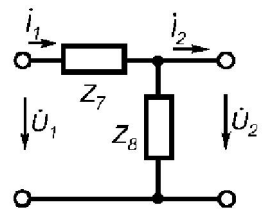


Рис.79

Тогда для  $Z_{C1}$  и  $Z_{C2}$  можно записать:

$$Z_{C1} = \sqrt{Z_7 Z_8 \cdot (1 + Z_7 / Z_8)}; \quad Z_{C2} = \sqrt{Z_7 Z_8 / (1 + Z_7 / Z_8)}.$$

Входное сопротивление второго каскада (симметричный четырехполюсник рис.80):  $Z_{C2} = \sqrt{B/C} = \sqrt{Z_4 Z_5 / (2 + Z_4/Z_5)}$ .

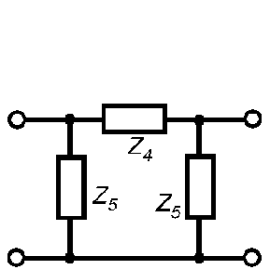


Рис.80

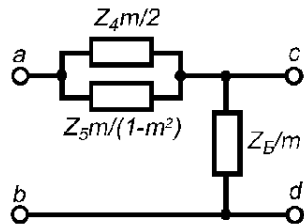


Рис.81

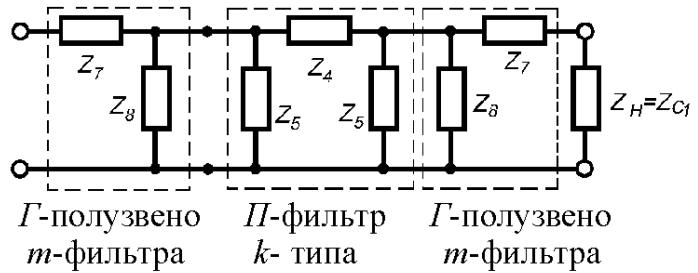


Рис.82

Сопротивление  $Z_8$  полувзвена  $m$ -фильтра берут равным  $Z_5/m$ , где числовой коэффициент  $m$  находится в диапазоне  $0 < m < 1$ . Подставляя  $Z_8 = Z_5/m$  и сравнивая с подкоренным выражением для  $Z_{C2}$ , получаем соотношение для нахождения сопротивления  $Z_7$ :

$$\frac{Z_7 \frac{Z_5}{m}}{1 + m \frac{Z_7}{Z_5}} = \frac{Z_4 Z_5}{2 + \frac{Z_4}{Z_5}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{Z_7} = \frac{1}{Z_4 \frac{m}{2}} + \frac{1}{Z_5 \frac{m}{1-m^2}}$$

Последнее выражение свидетельствует о том, что сопротивление  $Z_7$  можно представить как параллельное соединение  $Z_4 m/2$  и  $Z_5 m/(1-m)^2$ . Тогда схема полувзвена  $m$ -фильтра может быть представлена в виде как на рис.81. Поскольку  $Z_7$  образовано параллельно соединенными сопротивлениями зависимыми (производными) от сопротивлений  $Z_4$  и  $Z_5$   $k$ -фильтра, то такой фильтр называют фильтром параллельно-производного типа.

Заменяем сопротивление  $Z'_H = Z_{C2}$  другим полувзвеном  $m$ -фильтра, на выходе которого и включим нагрузку  $Z_H = Z_{C1}$  (рис.82).

Если первое полувзвено  $m$ -фильтра  $\Gamma$ -типа, то второе полувзвено  $\Gamma$ -типа, состоит из таких же сопротивлений  $Z_7$  и  $Z_8$ . Для  $\Gamma$ - полувзвена входное сопротивление слева равняется  $Z'_H = Z_{C2}$ , а справа  $Z_{C1}(Z_H)$ . На практике  $Z_{C1}$  для фильтра НЧ берут равным его значению при  $\omega \rightarrow 0$ , а для ВЧ – фильтра при  $\omega \rightarrow \infty$ . В обоих случаях  $Z_{C1} = \sqrt{L/2C}$ , где  $L$  и  $C$  индуктивность и емкость  $k$ -фильтра, являющегося прототипом  $m$ -фильтра.

Границы полосы прозрачности  $m$ -фильтра определяют также как и для  $k$ -фильтра  $A(\omega) = \pm 1$  (для НЧ и ВЧ фильтров). В полосе затухания для  $m$ -фильтра  $ch \alpha = \pm A(\omega)$ . Знак «-» относится к полосе частот  $\omega_0$  до  $\omega_C$ , знак «+» - к полосе частот от  $\omega_0$  до  $\infty$  для НЧ фильтров и к полосе частот от  $\omega_0$  до  $0$  для ВЧ фильтров. Это объясняется тем, что сопротивление  $Z_7$  меняет знак на резонансной частоте  $\omega_0$ .

Границы полосы прозрачности для  $k$ -фильтра и для согласованного с ним  $m$ -фильтра совпадают. Результирующее затухание всего фильтра  $\alpha(\omega)$  равно

сумме затуханий  $\alpha_m(\omega)$   $m$ -фильтра и  $\alpha_k(\omega)$   $k$ -фильтра, т. е.  $\alpha(\omega) = \alpha_m(\omega) + \alpha_k(\omega)$ .

Характер зависимости затуханий  $\alpha_m(\omega)$   $m$ -фильтров НЧ и ВЧ имеет вид, показанный на рис.83, а-б. Здесь  $\omega_C$  – частота среза;  $\omega_0$  – резонансная частота, при которой цепь из параллельно соединенных  $Z_4 m/2$  и  $Z_5 m/(1-m)^2$  (противоположного характера) резонирует.

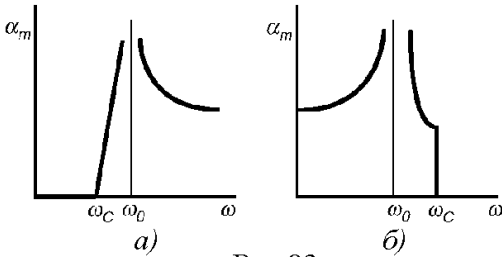


Рис.83

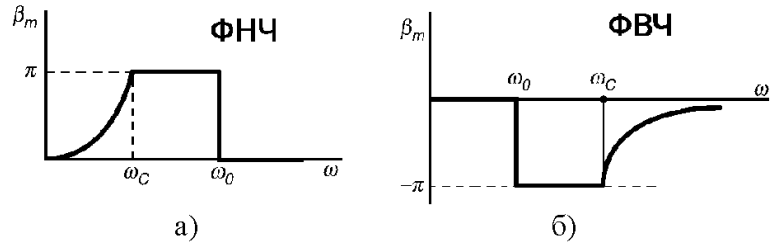


Рис.84

На частоте  $\omega_0$  сопротивление  $Z_7 = \infty$  и  $\alpha_m(\omega) \rightarrow \infty$ . В области частот от  $\omega_C$  до  $\omega_0$  затухание  $\alpha_m(\omega)$  резко увеличивается для НЧ и спадает для ВЧ. Это очень существенно, так как обеспечивается большое затухание в начале полосы затухания, где  $\alpha_k(\omega)$  мало. Уменьшение  $\alpha_m(\omega)$  на частотах  $\omega > \omega_0$  компенсируется ростом  $\alpha_k(\omega)$ .

Напряжение на входных зажимах фильтра опережает напряжение на нагрузке на угол  $\beta = \beta_m + \beta_k$ . Зависимости  $\beta_m(\omega)$  для ФНЧ и ФВЧ приведены на рис.84, а)-б) (для  $\beta_k$  рассматривались ранее).

На рис.85 приведена зависимость сопротивления  $Z_{C1}(\omega)$  для трех различных значений  $m$ . При значениях  $m = 0,5 - 0,6$  сопротивление  $Z_{C1}$  остается практически неизменным во всей полосе прозрачности и резко уменьшается только вблизи частоты среза.

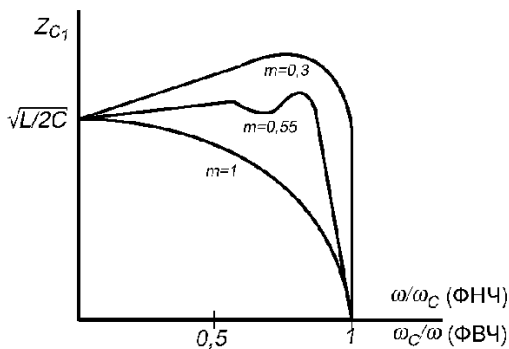


Рис.85

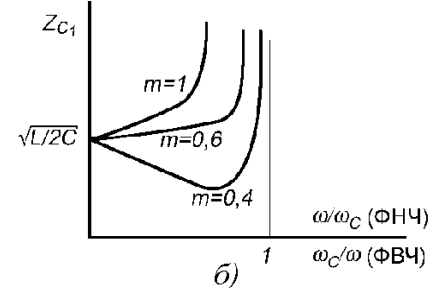
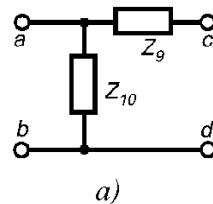


Рис.86

Рассмотрим свойства  $\Gamma$ - полузвена  $m$ -фильтра (рис.86,а).

Характеристические сопротивления определяются выражениями:

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{Z_9 Z_{10}}{1 + Z_9 / Z_{10}}}; \quad Z_{C2} = \sqrt{Z_9 Z_{10} \left(1 + \frac{Z_9}{Z_{10}}\right)}.$$

Входное сопротивление  $T$ -образного  $k$ -фильтра:  $Z_{C2} = \sqrt{Z_1 Z_2 (2 + Z_1 / Z_2)}$ .

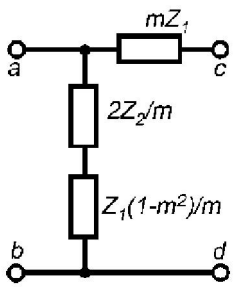


Рис.87

$\Gamma$  – полувзвено (рис.87) называют последовательно-производным, так как его сопротивление  $Z_{10}$  состоит из двух последовательно соединенных сопротивлений  $2Z_2/m$  и  $Z_1(1-m^2)/m$ , которые являются производными от сопротивлений  $Z_1$  и  $Z_2$   $k$ -фильтра.

Сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$  имеют противоположный характер, поэтому на некоторой частоте сопротивление  $Z_{10} = 0$  (последовательный резонанс).

Зависимость сопротивления  $Z_{C1}$  в полосе прозрачности от  $\omega/\omega_C$  для ФНЧ и от  $\omega_C/\omega$  для ФВЧ дана на рис.86, б для трех различных значений  $m$ . Для  $m = 0,5 - 0,6$   $Z_{C1}$  мало зависит от частоты. Зависимости  $\alpha_m(\omega)$  и  $\beta_m(\omega)$  соответствуют рассмотренным ранее (рис.83,84).

Теоретически бесконечно большое затухание в  $m$ -фильтре на резонансной частоте возникает за счет того, что в параллельной ветви полувзвена возникает резонанс токов (сопротивление стремится к бесконечности) или в последовательной ветви резонанс напряжений (сопротивление стремится к нулю).

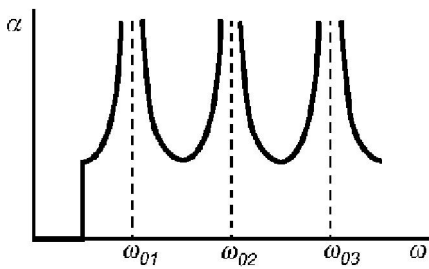


Рис.88

При каскадном соединении нескольких  $m$ -фильтров значения  $L$  и  $C$  выбирают различными, чтобы создавать большие затухания на нескольких заданных частотах  $\omega_{01}, \omega_{02}$  и т.д.

При этом зависимость затухания  $\alpha(\omega)$  для ФНЧ имеет вид гребешка, и такие фильтры называют гребенчатыми (рис.88).

### RC - фильтры

Если сопротивление нагрузки фильтра очень большое (например, входное сопротивление усилителя) и фильтр предназначен для области низких частот, то для избежания получения громоздких фильтров с низкой добротностью катушки используют безиндуктивные RC-фильтры.

Простейшие ФНЧ RC-фильтры имеют вид, показанный на рис.89, а.

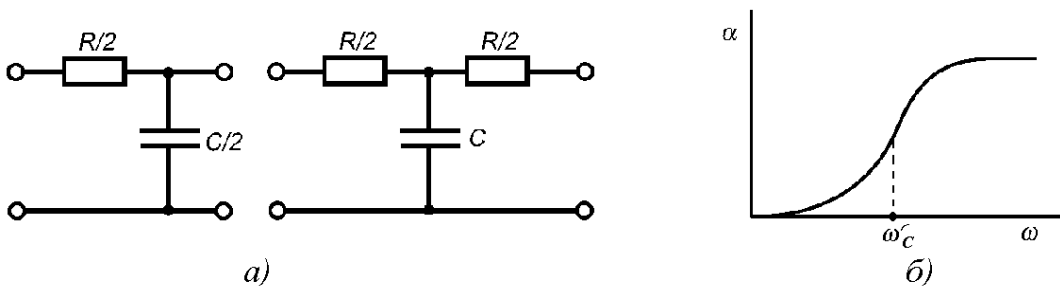


Рис.89

Учитывая малую крутизну кривой  $\alpha(\omega)$  однозвенного фильтра, часто используют многозвенные (2-х, 3-х...) фильтры, но при этом увеличивается затухание и в полосе прозрачности.

$$chg = ch(\alpha + j\beta) = ch\alpha \cos \beta + jsh\alpha \sin \beta.$$

С другой стороны,  $\omega = 0$   $chg = A = 1 + Z_1/Z_2 = 1 + jR\omega C/2$  (для T-образной схемы).

$$\text{Тогда можно записать } ch\alpha \cos \beta = 1; sh\alpha \sin \beta = R\omega C/2. \quad (*)$$

При постоянном токе  $\omega = 0$  и  $ch\alpha \cos \beta = 1; sh\alpha \sin \beta = 0$ .

Эти условия выполняются одновременно если  $\alpha = 0$  и  $\beta = 0$ .

При  $\omega > 0$   $R\omega C/2 > 0$  и  $\sin \beta > 0$ , т.к.  $sh\alpha > 0$  ( $\sin \beta < 0$  и  $sh\alpha < 0$  не подходит).

В отличие от реактивных фильтров, RC-фильтр не имеет области частот в пределах которой собственное затухание  $\alpha$  равно нулю.

Совместное решение уравнений (\*) позволяет получить соотношение для частотных характеристик фильтра.

$$\text{После возведения в квадрат, получим } ch^2\alpha \cos^2 \beta = 1.$$

С учетом того, что  $ch^2\alpha = 1 + sh^2\alpha$ ;  $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$ , можем записать:

$$(1 + sh^2\alpha)(1 - \sin^2 \beta) = 1.$$

Подставив в это выражение  $\sin \beta = R\omega C/2sh\alpha$ , получим биквадратное уравнение:

$$sh^4\alpha - (\omega CR/2)^2 \cdot sh^2\alpha - (\omega CR/2)^2 = 0;$$

откуда

$$sh\alpha = \sqrt{\frac{(\omega RC)^2}{8} + \frac{\omega RC}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega RC}{4}\right)^2}.$$

Для частот  $\omega$ , при которых  $\omega CR/2 \ll 1$ ,  $sh\alpha \approx \alpha \approx \sqrt{\omega RC/2}$ , т.е.  $\alpha \rightarrow 0$ .

За частоту среза ФНЧ условно принимается частота, при которой равны активные и емкостные сопротивления ветвей Г-образного звена  $R/2 = 2/\omega_c C$  или  $\omega_c RC/4 = 1$ .

В этом случае  $sh\alpha = 2,2$ ;  $\alpha = 13,3$  дБ;  $\omega_c = 4/RC$ .

Фильтры верхних частот с приблизительной частотной характеристикой затухания показаны на рис.90.

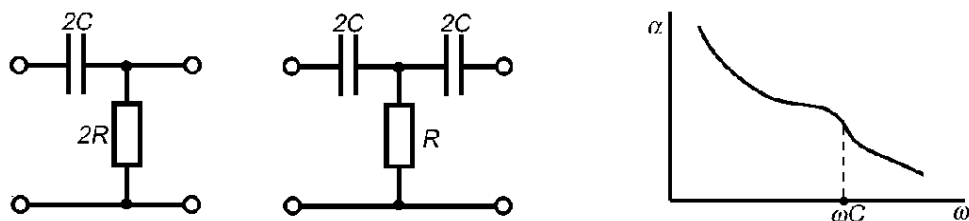


Рис.90

При низких частотах, когда емкостное сопротивление большое, напряжение на выходе фильтра мало. При этом получается большое затухание (при  $\omega = 0$  бесконечно большое).

С увеличением частоты емкостное сопротивление уменьшается, и напряжение на выходе фильтра увеличивается, т.е. затухание уменьшается.

Используют также многозвенные фильтры.

Для этого случая  $ch\alpha \cos \beta = 1$ ;  $sh\alpha \sin \beta = -1/2R\omega C$ .

При  $\omega \rightarrow \infty$   $ch\alpha \cos \beta = 1$ ;  $sh\alpha \sin \beta = 0$ . Тогда  $\alpha = 0$  и  $\beta = 0$ .

При  $0 < \omega < \infty$ ,  $\sin \beta < 0$ , ( $\alpha > 0$ ,  $sh\alpha > 0$ )  $\Rightarrow \beta < 0$ .

Совместное решение уравнений (\*) дает:

$$sh^4 \alpha - \frac{1}{(2\omega RC)^2} sh^2 \alpha - \frac{1}{(2\omega RC)^2} = 0, \quad \text{откуда}$$

$$sh\alpha = \sqrt{\frac{1}{8(\omega RC)^2} + \frac{1}{2\omega RC} \sqrt{1 + \frac{1}{(4\omega RC)^2}}}.$$

Для  $\omega$ , при которых  $1/2\omega CR \ll 1$   $sh\alpha \approx \alpha \approx \sqrt{1/2\omega CR}$ .

Если за частоту среза принять частоту, при которой сопротивления ветвей  $\Gamma$ -образного фильтра равны:

$$2R = 1/\omega_c C \quad \text{или} \quad 1/4\omega_c RC = 1 \Rightarrow \omega_c = 1/RC.$$

$$sh\alpha = 2,2; \quad \alpha = 1,53 \text{ Нн} (13,3 \text{ дБ}), \quad \alpha_{\text{дБ}} = 20 \lg e \cdot \alpha_{\text{Нн}}.$$

Простейшая схема полосового  $RC$ -фильтра и его характеристика приведены на рис.91.

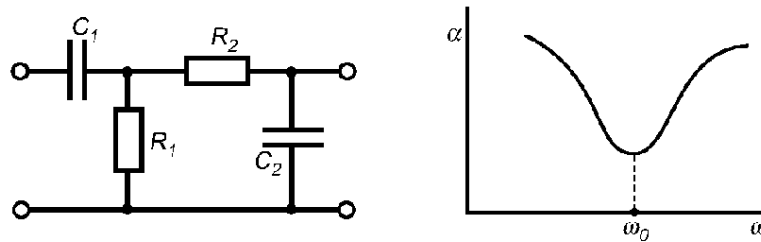


Рис.91

Полосовой  $RC$ -фильтр построен так, что емкость первого звена, обеспечивает затухание более низких частот, а второго звена - более высоких частот. Средняя частота полосы прозрачности, при которой затухание  $\alpha(\omega)$  минимально:

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}.$$

При  $R_1 = R_2 = R$  и  $C_1 = C_2 = C$   $\omega_0 = 1/RC$ .

Заградительный фильтр состоит из двух параллельно соединенных  $T$ -образных  $RC$ -фильтров верхних и нижних частот (рис.92).



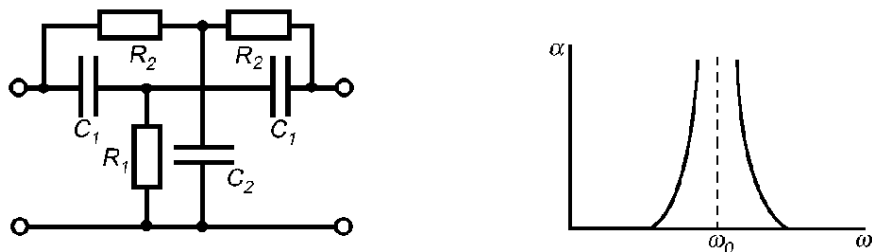


Рис.92

Соответствующим подбором параметров элементов можно достичь того, что при определенной частоте токи на выходе обеих  $T$ -образных схем будут равны и противоположны по знаку. При этом ток в нагрузке будет равняться нулю. Затухание на этой частоте будет бесконечно большим.

$RC$ -фильтры часто используют вместе с усилителем. В этом случае в полосе пропускания имеет место усиление сигнала.

## Содержание

<i>Трехфазные цепи</i> .....	3
<i>Основные схемы соединения трехфазных цепей</i> .....	4
<i>Соотношение между линейными и фазными напряжениями и токами</i> .....	6
<i>Расчет трехфазных цепей</i> .....	7
<i>Симметричный режим работы трехфазной цепи</i> .....	7
<i>Несимметричный режим работы трехфазной цепи</i> .....	9
<i>Соединение нагрузки треугольником</i> .....	10
<i>Мощность в трехфазных цепях</i> .....	11
<i>Круговое вращающееся магнитное поле</i> .....	13
<i>Четырехполюсники</i> .....	15
<i>Системы уравнений четырехполюсников</i> .....	16
<i>Y- форма записи уравнений четырехполюсника</i> .....	17
<i>Z- форма записи уравнений четырехполюсника</i> .....	18
<i>A- форма записи уравнений четырехполюсника</i> .....	19
<i>Параметры холостого хода и короткого замыкания</i> .....	20
<i>Схемы замещения четырехполюсников</i> .....	21
<i>Схемы замещения обратимых четырехполюсников</i> .....	21
<i>Схемы замещения необратимых четырехполюсников</i> .....	23
<i>Входные и характеристические сопротивления четырехполюсника</i> .....	24
<i>Коэффициент распространения четырехполюсника (постоянная передачи; мера распространения)</i> .....	25
<i>Виды соединений четырехполюсников</i> .....	26
<i>Последовательное соединение</i> .....	26
<i>Параллельное соединение</i> .....	27
<i>Электрические цепи периодического несинусоидального тока</i> .....	29
<i>Ряд Фурье в тригонометрической форме</i> .....	30
<i>Графо-аналитический метод разложения в ряд Фурье</i> .....	31
<i>Влияние симметрии формы периодической кривой на ее гармонический состав</i> .....	32
<i>Перенос начала отсчета</i> .....	33
<i>Комплексная форма ряда Фурье</i> .....	34
<i>Применение ряда Фурье для расчета периодического несинусоидального процесса</i> .....	35
<i>Действующее и среднее значения периодической несинусоидальной функции</i> .....	37
<i>Мощность в цепи периодического несинусоидального тока</i> .....	38
<i>Коэффициенты, характеризующие периодические несинусоидальные функции</i> .....	39

<i>Величины, измеряемые амперметрами и вольтметрами при несинусоидальных токах.....</i>	<b>39</b>
<i>Эквивалентные синусоидальные напряжения и токи.....</i>	<b>40</b>
<i>Высшие гармоники в трехфазных цепях.....</i>	<b>40</b>
<i>Резонанс в цепи несинусоидального тока.....</i>	<b>42</b>
<i>Электрические фильтры.....</i>	<b>43</b>
<i>Назначения и типы фильтров.....</i>	<b>43</b>
<i>Основы теории k-фильтров.....</i>	<b>44</b>
<i>НЧ и ВЧ k-фильтры.....</i>	<b>47</b>
<i>Полосовые и заграждающие k-фильтры.....</i>	<b>49</b>
<i>Качественное определение k-фильтра.....</i>	<b>50</b>
<i>Основы теории т-фильтров. Каскадное включение фильтров.....</i>	<b>50</b>
<i>RC-фильтры.....</i>	<b>54</b>

