



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ УКРАИНЫ

КИЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра промышленной электроники

КУРС ЛЕКЦИЙ

по курсу: «Теория электрических цепей»

ЧАСТЬ 2.

«Однофазные цепи переменного синусоидального тока»

Киев 2003 г.

Электрические цепи однофазного синусоидального тока

Синусоидальный ток и основные характеризующие его величины

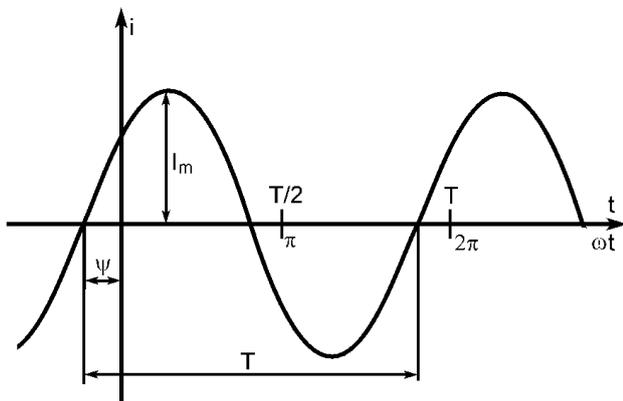


Рис.1.

Синусоидальный ток - это ток, изменяющийся по синусоидальному закону (рис.1):

$$i(t) = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \psi\right) = I_m \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

$i(t)$ - мгновенное значение тока.

Максимальное значение функции I_m называется **амплитудным значением** тока или **амплитудой**.

Период T - это время, за которое осуществляется одно полное колебание.

Частота f - величина обратная к периоду (или количество периодов за единицу времени):

$$f = 1/T \text{ [Гц]}.$$

Угловая частота ω - это скорость изменения фазы (угла):

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi/T \text{ [рад/сек]}.$$

Аргумент синусоиды $\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right) \cdot t + \psi\right) = (\omega \cdot t + \psi)$ называется **фазой**. **Фаза** характеризует состояние колебания в данный момент времени. Фаза с течением времени непрерывно возрастает. После ее увеличения до 2π весь цикл изменения тока повторяется.

Начальная фаза ψ определяется от момента перехода от отрицательных значений функции к положительным и до начала координат. Если $\psi < 0$, то начало синусоиды сдвинуто вправо, а для $\psi > 0$ - влево.

Косинусоиду можно рассматривать как синусоиду с начальной фазой $\psi = \pi/2$, то есть:

$$i(t) = I_m \cos(\omega \cdot t + \psi_1) = I_m \sin(\omega \cdot t + \psi) \quad \text{где } \psi_1 = \psi - \pi/2.$$

Любая функция, изменяющаяся по синусоидальному закону, определяется тремя величинами:

- амплитудой;
- угловой частотой;
- начальной фазой.

За аргумент функции может быть принято время t , или соответственно, угол ωt . Аргументу t соответствует период T , а аргументу ωt - период $\omega t = 2\pi$.

Если аргумент ωt выражен в радианах, то и начальная фаза ψ также должна быть выражена в радианах, если ωt имеет выражение в градусах (период 360°), то и начальная фаза ψ должна быть выражена в градусах.

Среднее и действующее значение функций, изменяющихся по синусоиде

Среднее значение периодической функции $f(t)$ за период T определяется по формуле:

$$F_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

В случае синусоидальной функции среднее значение за период равно нулю. Поэтому для синусоидальных функции используют понятие **среднего по модулю** (среднего выпрямленного, среднего за полпериода) значения, которое определяют по формуле:

$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t \cdot dt = \frac{2I_m}{\omega \cdot T} (-\cos \omega \cdot t) \Big|_0^{T/2} = \frac{2I_m}{\pi} \approx 0,637I_m.$$

Аналогично определяется среднее выпрямленное значение для $e(t)$ и $u(t)$.

Тепловое действие тока пропорциональна квадрату тока. Поэтому о величине тока обычно судят по **действующему** (среднеквадратичному, эффективному) значению за период:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707I_m.$$

За один период переменного тока в проводнике с сопротивлением R выделяется тепловая энергия:

$$W = \int_0^T Ri^2(t) dt = R \cdot T \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = R \cdot I^2 \cdot T.$$

Тепловая энергия, которая выделяется за это же время постоянным током будет равняться $R \cdot I_0^2 \cdot T$.

Если сравнить тепловое действие постоянного и переменного токов, то получим: $R \cdot I^2 \cdot T = R \cdot I_0^2 \cdot T$. Откуда следует: $I = I_0$.

Действующее значение переменного тока равно такому постоянному току, который проходя через сопротивление R за период T выделяет такое же количество тепла, что и переменный ток. Если специально не оговаривается, то под током, напряжением, ЭДС понимают их действующие значения.

Для характеристики переменных сигналов используют также коэффициент амплитуды и коэффициент формы:

$$K_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2} \quad - \text{коэффициент амплитуды};$$

$$K_f = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11 \quad - \text{коэффициент формы}.$$

Для несинусоидального тока эти коэффициенты имеют другие численные значения!

Изображение синусоидальных функций времени векторами и комплексными числами

Тригонометрическая форма расчета цепей синусоидального тока применяется только для самых простых электрических цепей. В более сложных случаях тригонометрический метод расчета становится очень трудоемким. Нужен метод, который позволяет рассчитывать цепи переменного тока в алгебраической форме подобно цепям постоянного тока. Таким удобным расчетным методом является *метод комплексных амплитуд (комплексный, символический)*. Этот метод основан на замене синусоидальных функций времени вращающимися векторами.

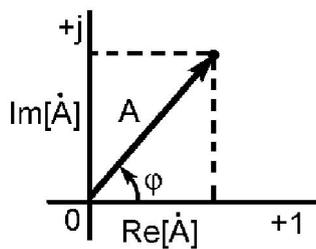


Рис.2.

По формуле Эйлера можно перейти от показательной формы записи к алгебраической:

Любая точка на комплексной плоскости определяется радиусом-вектором этой точки (рис.2). В показательной (полярной) форме записи:

$$\dot{A} = A e^{j\varphi} = A \angle \varphi,$$

где A - модуль; φ - аргумент (фаза); $j = \sqrt{-1}$.

$$\dot{A} = A \cos \varphi + j \cdot A \sin \varphi = \operatorname{Re} \left[\dot{A} \right] + j \operatorname{Im} \left[\dot{A} \right];$$

$$A = \sqrt{\operatorname{Re} \left[\dot{A} \right]^2 + \operatorname{Im} \left[\dot{A} \right]^2};$$

$$\psi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[\dot{A}]}{\operatorname{Re}[\dot{A}]}, & \operatorname{Re}[\dot{A}] \geq 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[\dot{A}]}{\operatorname{Re}[\dot{A}]} \pm \pi, & \operatorname{Re}[\dot{A}] < 0. \end{cases}$$

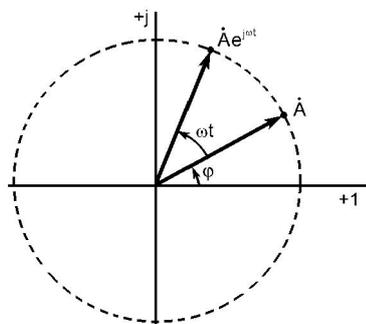


Рис.3

Вектор, который вращается в положительном направлении (против хода часовой стрелки) с угловой скоростью ω (рис.3) может быть представлен таким образом:

$$A e^{j(\omega \cdot t + \varphi)} = A e^{j \cdot \varphi} e^{j \cdot \omega \cdot t} = \dot{A} e^{j \cdot \omega \cdot t},$$

где $\dot{A} = A e^{j\varphi}$ - **комплексная амплитуда**, которая определяет этот вектор в момент времени $t=0$. Это комплексная величина, которая не зависит от времени, а ее модуль и аргумент равны соответственно амплитуде

и начальной фазе заданной синусоидальной функции.

Множитель $e^{j\omega t}$ называется **оператором вращения** (вращающий множитель). Умножение комплексной амплитуды \dot{A} на $e^{j\omega t}$ означает поворот вектора \dot{A} на угол $\omega \cdot t$ в положительном направлении.

Представим комплексную функцию $Ae^{j(\omega t + \varphi)}$ в тригонометрической форме:

$$Ae^{j(\omega t + \varphi)} = A\cos(\omega t + \varphi) + jA\sin(\omega t + \varphi).$$

Таким образом, синусоидальная функция $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ может рассматриваться как мнимая часть комплексной функции $Ae^{j(\omega t + \varphi)}$ или как проекция вращающегося вектора на мнимую ось. Условно это записывают таким образом:

$$A\sin(\omega t + \varphi) = \text{Im} \left[\dot{A} e^{j \cdot \omega \cdot t} \right].$$

Аналогично, косинусоидная функция $A\cos(\omega t + \varphi)$ может рассматриваться как действительная (вещественная) часть комплексной функции:

$$A\cos(\omega \cdot t + \varphi) = \text{Re} \left[\dot{A} e^{j \cdot \omega \cdot t} \right].$$

Если синусоидальные функции имеют одну и ту же частоту, то соответствующие этим функциям векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью, а поэтому углы между ними сохраняются неизменными.

Рассмотрим две синусоидальные функции, которые имеет одинаковую частоту ω :

$$u_1(t) = U_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) \quad \text{и} \quad u_2(t) = U_{m2} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Функция $u_1(t)$ опережает $u_2(t)$ по фазе, причем фазовый сдвиг равен разности начальных фаз (рис.4, а): $\varphi = \psi_1 - (-\psi_2) = \psi_1 + \psi_2$.

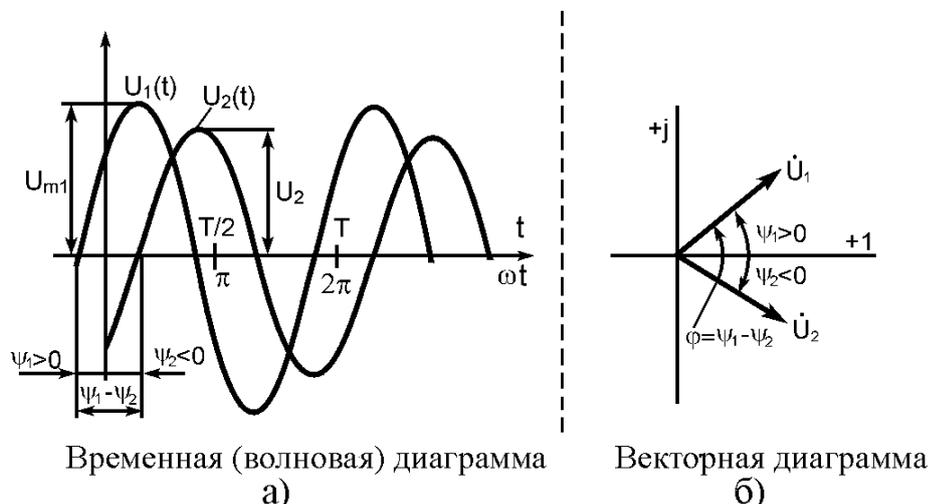


Рис.4

Диаграмма, изображающая совокупность векторов, построенных с учетом их взаимной ориентации по фазе, называется **векторной диаграммой** (рис.4, б), а кривые мгновенных значений - **временной (волновой) диаграммой** (рис.4, а).

Пример:

Мгновенное значение тока: $i(t) = 8 \sin(\omega \cdot t + 20^\circ) A$. Записать выражение для

комплексной амплитуды этого тока: $\dot{I}_m = 8 \cdot e^{j20^\circ} A = 8 \angle 20^\circ A$.

Комплексная амплитуда напряжения $\dot{U}_m = 100 \angle e^{\frac{j\pi}{6}} B$. Записать мгновенное значение напряжения: $u(t) = 100 \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{6}) B$.

Сложение и вычитание синусоидальных функций на комплексной плоскости

Пусть необходимо найти сумму двух токов $i_1(t)$ и $i_2(t)$ одинаковой частоты. Их сумма дает некоторый ток той же частоты:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_{m1} \sin(\omega \cdot t + \psi_1) + I_{m2} \sin(\omega \cdot t - \psi_2) = I_m \sin(\omega \cdot t + \psi).$$

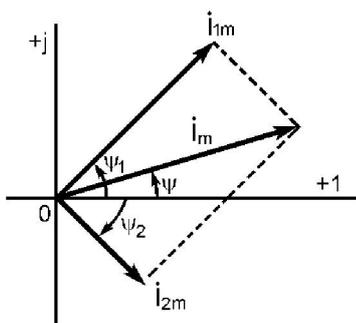


Рис.5

Необходимо определить амплитуду I_m и начальную фазу ψ тока $i(t)$. Изобразим на комплексной плоскости токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ при помощи соответствующих векторов (рис.5): $\dot{I}_{m1} = I_{m1} \cdot e^{j\psi_1}$ и $\dot{I}_{m2} = I_{m2} \cdot e^{j\psi_2}$.

Геометрическая сумма векторов \dot{I}_{m1} и \dot{I}_{m2} дает комплексную амплитуду суммарного тока: $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$.

Для определения разности двух ЭДС, напряжений или токов необходимо выполнить вычитание соответствующих векторов на комплексной плоскости (рис.6):

$$u(t) = u_1(t) - u_2(t) = U_{m1} \sin(\omega \cdot t + \psi_1) - U_{m2} \sin(\omega \cdot t + \psi_2) = U_m \sin(\omega \cdot t + \psi).$$

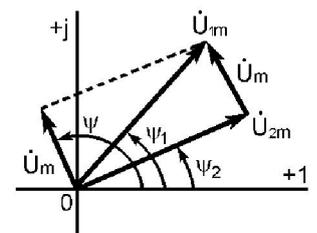


Рис.6

Мгновенная мощность. Активные и реактивные сопротивления

Прохождение синусоидальных токов по участкам электрической цепи сопровождается потреблением энергии от источников. Скорость поступления энергии в электрическую цепь характеризуется мощностью. Мгновенным значением мощности (мгновенной мощностью) называют произведение мгновенного значения напряжения на участке цепи $u(t)$ на мгновенное значение тока $i(t)$, который проходит по этому участку:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t).$$

Мгновенная мощность является функцией времени.

Пассивными элементами электрических цепей синусоидального тока являются активное сопротивление R , индуктивность L и емкость C . Термин «сопротивление» для цепей синусоидального тока недостаточно полный, т.к. сопротивление переменному току оказывают не только те элементы цепи, в которых выделяется энергия в виде теплоты (*активные сопротивления*), но и те элементы цепи, в которых энергия в виде теплоты не выделяется, а периодически накапливается в электрическом или магнитном полях. Такие элементы цепи называют реактивными, а их сопротивления переменному току - *реактивными сопротивлениями* (сопротивления индуктивностей и емкостей).

Расчет цепей синусоидального тока

Синусоидальный ток в активном сопротивлении

Пусть к активному сопротивлению R приложено синусоидальное напряжение $u(t) = U_m \sin(\omega \cdot t + \psi)$ (рис.7, а). В цепи будет проходить ток:

$$i(t) = \frac{U_m}{R} \sin(\omega \cdot t + \psi) = I_m \sin(\omega \cdot t + \psi).$$

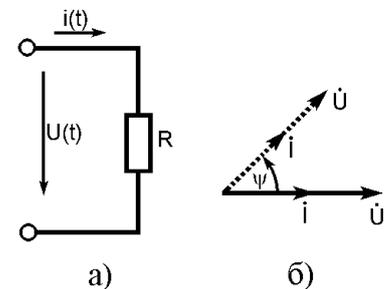


Рис.7

Ток и напряжение имеют одинаковые начальные фазы (совпадают по фазе) (рис7, б). Амплитудные и действующие значения тока и напряжения связаны соотношениями подобными закону Ома:

$$I_m = \frac{U_m}{R}; \quad I = \frac{U}{R}; \quad I = GU.$$

Мгновенная мощность, поступающая в активное сопротивление:

$$p_R = u(t) \cdot i(t) = U_m I_m \sin^2(\omega \cdot t + \psi) = UI [1 - \cos 2(\omega \cdot t + \psi)] = UI - UI \cos 2(\omega \cdot t + \psi).$$

Мгновенная мощность изменяется с удвоенной угловой частотой 2ω в пределах от 0 до $2UI$. Имеет две составляющие: постоянную UI и косинусоидную с амплитудой UI и угловой частотой 2ω .

Активная мощность характеризует энергию, которая превращается в теплоту за один период. Она определяется как среднее значение мгновенной мощности за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_R(t) dt = UI = RI^2 = GU^2.$$

Активная мощность всегда положительная, а следовательно энергия всегда передается от источника в активное сопротивление.

Мгновенная энергия:

$$w_R(t) = \int_0^t p_R(t) dt = \int_0^t [UI - UI \cos 2(\omega t + \psi)] dt = \\ = UI \cdot t - \frac{UI}{2\omega} [\sin 2(\omega t + \psi) - \sin 2\psi].$$

Временные (волновые) диаграммы показаны на рис.8 (для $\psi = 0$).

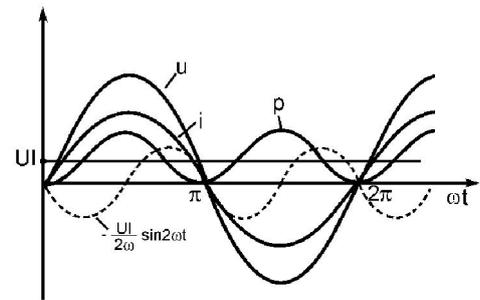


Рис.8

Синусоидальный ток в индуктивности

Пусть через индуктивность L проходит ток $i(t) = I_m \sin(\omega \cdot t + \psi)$ (рис.9). При этом возникает ЭДС самоиндукции:

$$e_L(t) = -L \frac{di}{dt} = -\omega \cdot LI_m \cos(\omega \cdot t + \psi) = \\ = -U_m \sin(\omega \cdot t + \psi + \frac{\pi}{2}) = U_m \sin(\omega \cdot t + \psi - \frac{\pi}{2}).$$

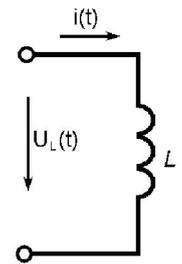


Рис.9

Напряжение на индуктивности:

$$u_L(t) = -e_L(t) = U_m \sin(\omega \cdot t + \psi + \pi/2).$$

Напряжение на индуктивности опережает по фазе ток на угол $\pi/2$, и противофазно к ЭДС самоиндукции (рис.10). Сдвиг фаз между напряжением и током:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = (\psi + \pi/2) - \psi = \pi/2.$$

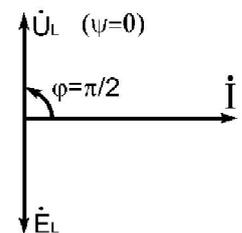


Рис.10

Амплитудные и действующие значения напряжения и тока связаны соотношениями, подобными закону Ома:

$$U_m = \omega LI_m; \quad U = \omega LI.$$

Величина $x_L = \omega L$, которая имеет размерность сопротивления, называется **индуктивным сопротивлением**. Обратная к ней величина называется **индуктивной проводимостью**: $b_L = 1/x_L = 1/\omega L$.

Тогда можно записать:

$$U = x_L \cdot I; \quad U_m = x_L \cdot I_m; \quad I_m = b_L \cdot U_m; \quad I = b_L \cdot U.$$

Индуктивное сопротивление $x_L = \omega L$ - это расчетная величина, при помощи которой учитывается явление самоиндукции - ограничение тока в индуктивности при синусоидальном напряжении.

Сопротивление x_L не характеризует необратимый процесс превращения электрической энергии в теплоту и этим коренным образом отличается от активного сопротивления.

Мгновенная мощность, которая поступает в индуктивность (для $\psi = 0$):

$$p_L = u_L(t) \cdot i(t) = 2U_L I \sin \omega t \cos \omega t = U_L I \sin 2\omega t.$$

Она изменяется по синусоидальному закону с угловой частотой 2ω и амплитудой $U_L \cdot I$, проходя через ноль, когда $u_L(t)$ или $i(t)$ равны нулю.

Среднее значение мощности за период (активная мощность) равно нулю. Таким образом энергия не превращается в другие виды, а только накапливается или рассеивается.

Амплитудное (максимальное) значение мгновенной мощности называется **реактивной мощностью**: $Q_L = U_L I = x_L I^2 = b_L U^2$.

Реактивная мощность характеризует наибольшую скорость поступления энергии в магнитное поле цепи: $p_L = \frac{dw_L}{dt}$.

Энергия магнитного поля индуктивности:

$$w_L = \int_{-\infty}^t p_L(t) dt = \int_0^i Li(t) di = \frac{Li^2(t)}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t = LI^2 \sin^2 \omega t = \frac{LI^2}{2} (1 - \cos 2\omega t).$$

Она изменяется периодически с угловой частотой 2ω в пределах от 0 до $LI^2 = LI_m^2/2$. Поступая от источника, энергия временно накапливается в магнитном поле индуктивности, а потом возвращается в источник при исчезновении магнитного поля. Энергия достигает максимума в моменты достижения током в индуктивности амплитудного значения, а затем спадает до нуля при токе, равном нулю. Временные диаграммы приведены на рис.11.

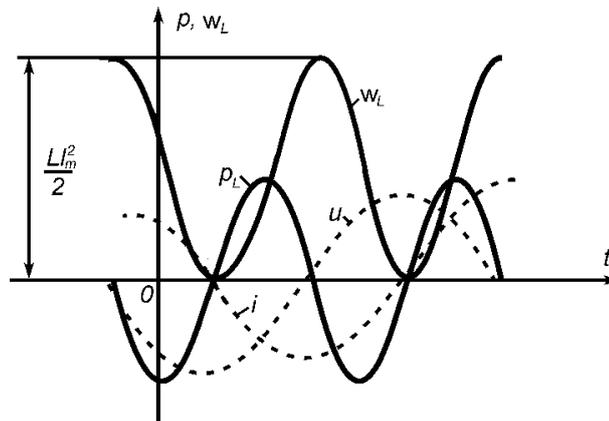


Рис.11

Реальная катушка индуктивности кроме индуктивности L имеет еще и активное сопротивление R (рис.12).

Поэтому падение напряжения на реальной катушке равно сумме напряжений на индуктивности $u_L(t)$ и активном сопротивлении $u_R(t)$:

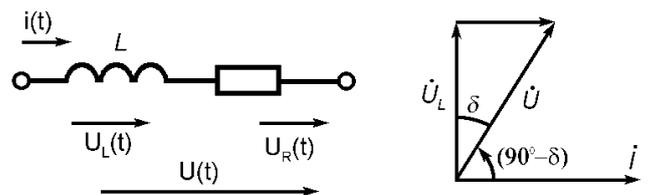


Рис.12

$$u(t) = u_L(t) + u_R(t).$$

$$U = \sqrt{U_L^2 + U_R^2}; \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{R}{\omega \cdot L} = \frac{1}{Q_L}; \quad \delta - \text{угол потерь}; \quad Q_L - \text{добротность (обычно}$$

достигает $200 \div 300$).

Чем больше R , тем более $\operatorname{tg} \delta$ и меньше Q_L .

Синусоидальный ток в емкости

Если напряжение $u_c(t)$, приложенное к конденсатору (рис.13), постоянно, то заряды на его обкладках соответственно $q = CU$ и $-q = -CU$ также будут постоянными и ток через конденсатор проходить не будет ($i = dq/dt = 0$). Если напряжение изменяется, например по синусоидальному закону:

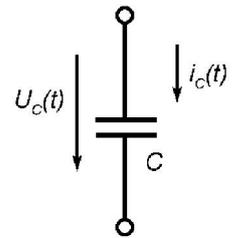


Рис.13

$$u_c(t) = U_{cm} \sin \omega t = \sqrt{2} U_c \sin \omega t,$$

то при этом по синусоидальному закону будет изменяться и заряд конденсатора:

$$q = Cu_c(t) = CU_{cm} \sin \omega t.$$

Через конденсатор будет проходить ток:

$$\begin{aligned} i_c(t) &= \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c(t)}{dt} = \omega \cdot CU_{cm} \cos \omega t = \\ &= \omega \cdot CU_{cm} \sin(\omega t + \pi/2) = \omega \cdot C \sqrt{2} U_c \sin(\omega t + \pi/2). \end{aligned}$$

Таким образом, ток в емкости опережает приложенное напряжение на угол $\pi/2$. Сдвиг фаз между напряжением и током (рис.14):

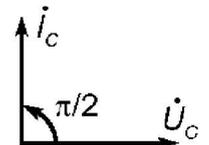


Рис.14

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - \pi/2 = -\pi/2.$$

Амплитудные и действующие значения тока и напряжения связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} I_{Cm} &= \omega CU_{Cm} = b_c U_{Cm}; \quad I_C = b_c U_C; \quad b_c = \omega C; \quad U_{Cm} = \frac{1}{\omega C} I_{Cm} = x_c I_{Cm}; \\ U_{Cm} &= \frac{1}{\omega C} I_{Cm} = x_c I_{Cm}; \quad x_c = \frac{1}{b_c} = \frac{1}{\omega \cdot C}, \end{aligned}$$

где x_c - емкостное сопротивление; b_c - емкостная проводимость. Сопротивление x_c характеризует ограничение тока в цепи емкости при подключении синусоидального напряжения. Мгновенная мощность, поступающая в емкость:

$$p_c(t) = u_c(t)i_c(t) = U_{Cm} I_{Cm} \sin \omega t \cdot \cos \omega t = U_C I_C \sin 2\omega t.$$

Мгновенная мощность изменяется с угловой частотой 2ω и амплитудой UI и характеризует скорость изменения энергии электрического поля.

Активная мощность в такой цепи равна нулю. Энергия электрического поля емкости:

$$w_c(t) = \int_{-\infty}^0 p_c(t) dt = \int C u_c(t) du_c = \frac{C u_c^2(t)}{2} = \frac{C U_{Cm}^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{C U_C^2}{2} (1 - \cos 2\omega t).$$

Временные диаграммы показаны на рис.15.

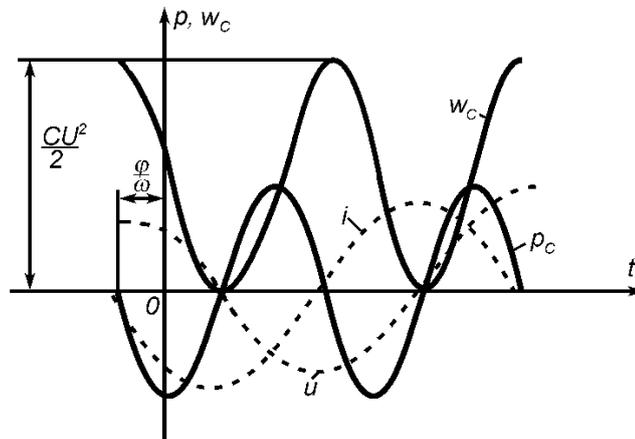


Рис.15

Энергия электрического поля емкости изменяется периодически с угловой частотой 2ω в диапазоне от 0 до $C U_{Cm}^2 / 2$. Поступая от источника, энергия временно запасается в электрическом поле емкости, а потом возвращается в источник при убывании электрического поля. Энергия электрического поля достигает максимума при прохождении напряжения через максимум, а затем спадает до нуля при напряжении, равном нулю. Реактивная мощность емкости:

$$Q_c = U_c I_c = x_c I_c^2 = b_c U_c^2.$$

Характеризует наибольшую скорость поступления энергии в электрическое поле емкости.

При подключении синусоидального напряжения к реальному конденсатору всегда имеют место некоторые потери энергии в диэлектрике. Для их учета конденсатор представляют схемой замещения, показанной на рис.16.

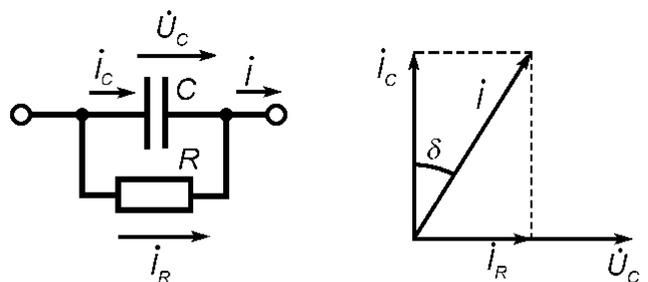


Рис.16

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega \cdot CR}; \quad Q_c = \omega \cdot CR; \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{Q_c};$$

δ - угол диэлектрических потерь. Чем больше сопротивление потерь R , тем больше (при прочих равных условиях) добротность конденсатора Q_c и меньше $\operatorname{tg} \delta$ (угол δ). Добротность реальных конденсаторов, применяемых в электронике, автоматике и приборостроении определяется сотнями и тысячами; $\operatorname{tg} \delta$ для различных частот и диэлектриков колеблется в пределах $10^{-1} - 10^{-4}$.

Последовательное соединения R, L, C - элементов

При прохождении синусоидального тока $i(t) = I_m \sin \omega t$ по участку цепи, который содержит последовательно соединённые R, L, C - элементы (рис.17), на выводах цепи возникает синусоидальное напряжение $u(t)$, которое равно алгебраической сумме синусоидальных напряжений на отдельных элементах цепи (2-й закон Кирхгофа):

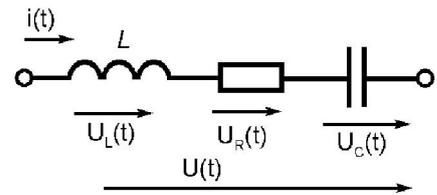


Рис.17

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t),$$

где $u_R(t) = RI_m \sin \omega t$; $u_L(t) = LI_m \sin(\omega t + \pi/2)$; $u_C(t) = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t - \pi/2)$.

Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} u(t) &= RI_m \sin \omega \cdot t + (\omega \cdot L - 1/\omega C)I_m \cos \omega \cdot t = \\ &= I_m (R \sin \omega t + x \cos \omega t) = U_m \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

где R - активное сопротивление цепи; $x = x_L - x_C = \omega L - 1/\omega C$ - реактивное сопротивление цепи. Если $x > 0$ цепь имеет индуктивный характер, при $x < 0$ цепь имеет емкостной характер.

Полное сопротивление цепи (импеданс):

$$z = \sqrt{R^2 + x^2} = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}.$$

Амплитудные и действующие значения тока и напряжения связаны между собой соотношениями:

$$U_m = z \cdot I_m; \quad U = z \cdot I.$$

Угол φ равен разности начальных фаз напряжения и тока и зависит от параметров цепи R, L, C :

$$\varphi = \arctg(x/R); \quad -\pi/2 < \varphi < \pi/2.$$

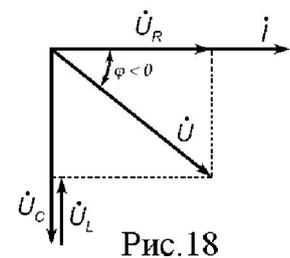


Рис.18

Векторная диаграмма для случая $x_C > x_L$ ($x < 0$) показана на рис.18. Угол $\varphi < 0$ (отсчитывается от вектора тока к вектору напряжения по часовой стрелке).

| Индуктивный характер цепи | Чисто активное сопротивление (резонансный режим) | Емкостной характер цепи |
|---------------------------|--|-------------------------|
| $x_L > x_C$ | $x_L = x_C$ | $x_L < x_C$ |
| $x > 0$ | $x < 0$ | $x < 0$ |
| $\varphi > 0$ | $\varphi = 0$ | $\varphi < 0$ |

Справедливые такие соотношения:

$$R = z \cdot \cos \varphi, \quad x = z \cdot \sin \varphi.$$

Умножив эти соотношения на действующее значение тока I , получим действующие значения напряжений на активном и реактивном сопротивлениях:

$$U_a = R \cdot I = z \cos \varphi \cdot I = U \cos \varphi - \text{активная составляющая напряжения};$$

$$U_p = x \cdot I = z \sin \varphi \cdot I = U \sin \varphi - \text{реактивная составляющая напряжения};$$

Отсюда:
$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}.$$

На рис.19 показаны треугольники напряжений и сопротивлений.

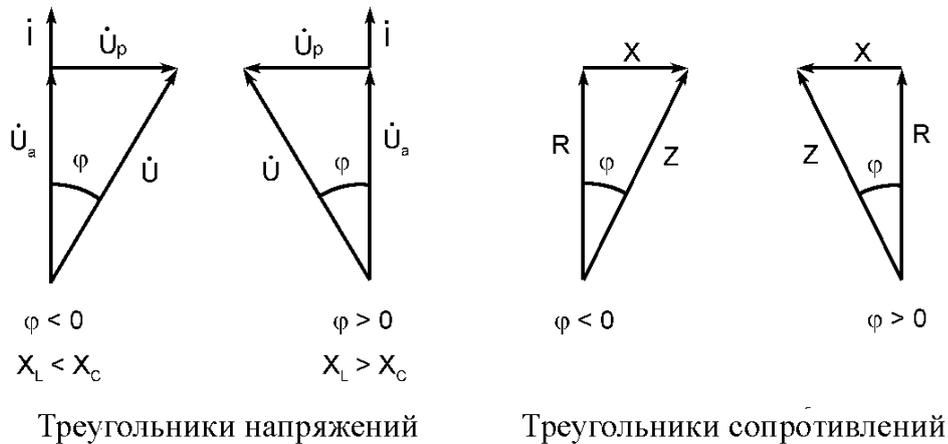


Рис.19

Временные диаграммы будут иметь вид, приведенный на рис.20.

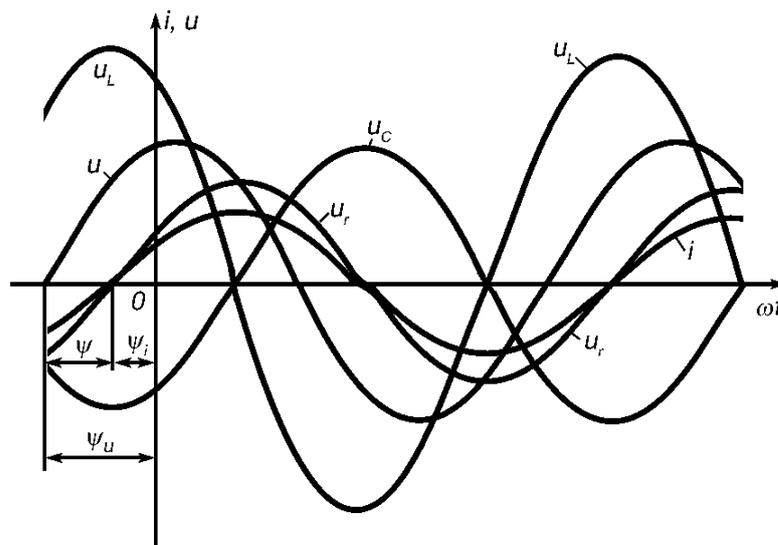


Рис.20

Параллельное соединение R, L, C - элементов

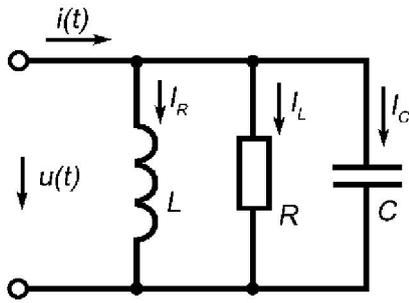


Рис.21

Пусть входное напряжение равно:

$$u(t) = U_m \sin \omega t$$

Для входного тока по первому закону Кирхгофа можно записать

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t)$$

$$I_{Rm} = gU_m; \quad I_{Lm} = b_L U_m; \quad I_{Cm} = b_C U_m;$$

$$g = 1/R; \quad b_L = 1/\omega L; \quad b = \omega C.$$

Тогда:

$$i(t) = I_{Rm} \sin \omega t + I_{Lm} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) + I_{Cm} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) =$$

$$= U_m \left[g \sin \omega t - \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \cos \omega t \right] = U_m [g \sin \omega t - b \cos \omega t] = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

где g - активная проводимость цепи; $b = b_L - b_C = (1/\omega L - \omega C)$ - реактивная проводимость цепи; $y = \sqrt{g^2 + b^2}$ - полная проводимость цепи.

На рис.22 приведена векторная диаграмма токов и напряжений. Справедливы такие формулы:

$$I_m = yU_m; \quad I = yU;$$

$$\varphi = \arctg b/g; \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2;$$

$$g = y \cos \varphi; \quad b = y \sin \varphi.$$

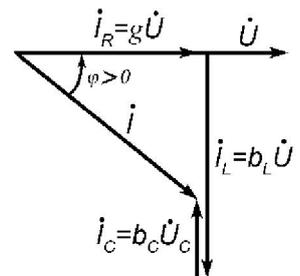


Рис.22

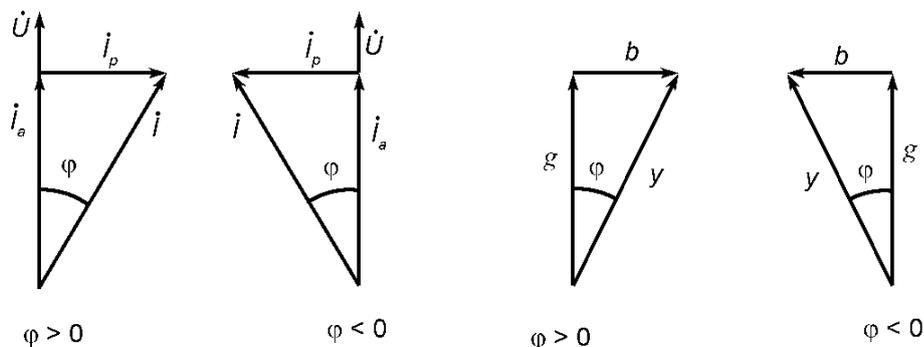
Если умножить g и b на действующее значение напряжения, то получим:

$$I_a = gU = y \cos \varphi \cdot U = I \cos \varphi - \text{активная составляющая тока};$$

$$I_p = bU = y \sin \varphi \cdot U = I \sin \varphi - \text{реактивная составляющая тока}.$$

Для действующего значения тока можно записать: $I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}$.

На рис.23 показаны треугольники токов и проводимостей.



инд. характер емк. характер
Треугольники токов

Треугольники проводимостей

Рис.23

Временные диаграммы имеют вид показанный на рис.24:

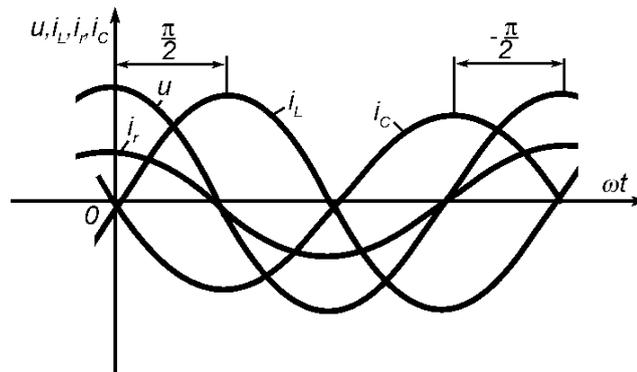


Рис.24

Соотношения между эквивалентными сопротивлениями и проводимостями электрической цепи

Цепь произвольной конфигурации может быть представлена одной из схем замещения, которые показаны на рис.25.

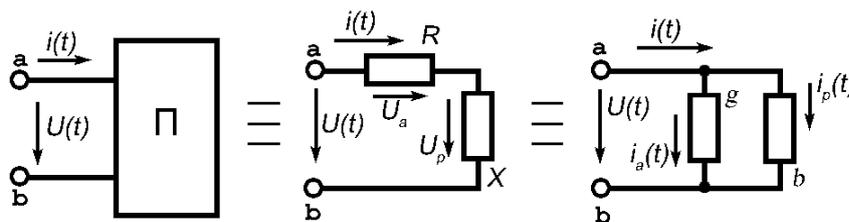


Рис.25

Эквивалентные параметры пассивного двухполюсника R , x или g , b .

Полное сопротивление z и полная проводимость y являются взаимно обратными величинами:

$$z = 1/y; \quad y = 1/z; \quad zy = 1.$$

Между сопротивлениями и проводимостями существуют следующие соотношения:

$$R = z \cos \varphi; \quad x = z \sin \varphi; \quad g = y \cos \varphi; \quad b = y \sin \varphi; \quad R/z = g/y = \cos \varphi.$$

Тогда можно записать:

$$g = y \frac{R}{z} = \frac{R}{z^2} = \frac{R}{R^2 + x^2}; \quad R = z \frac{g}{y} = \frac{g}{y^2} = \frac{g}{g^2 + b^2};$$

$$b = y \frac{x}{z} = \frac{x}{z^2} = \frac{x}{R^2 + x^2}; \quad x = z \frac{b}{y} = \frac{b}{y^2} = \frac{b}{g^2 + b^2}.$$

Введем понятие комплексного сопротивления и комплексной проводимости:

$$\dot{Z} = R + jx = ze^{j\varphi}; \quad \dot{Y} = g + jb = ye^{-j\varphi}; \quad \dot{Z} = 1/\dot{Y}.$$

Метод проводимостей

Метод состоит в замене участков цепи, которые содержат только параллельно или только последовательно соединённые двухполюсники эквивалентными им двухполюсникам. При параллельном соединении двухполюсников каждый из них представляется схемой замещения из параллельно соединённых активной g_k и реактивной b_k проводимостей. Активную и реактивную проводимости эквивалентной схемы замещения получают суммируя отдельно соответственно g_k и b_k . При последовательном соединении двухполюсников каждый из них представляется схемой замещения из последовательно соединённых активного R_k и реактивного x_k сопротивлений. Активное и реактивное сопротивления эквивалентной схемы замещения получают суммируя отдельно соответственно R_k и x_k .

При суммировании реактивных сопротивлений или проводимостей для ёмкостных элементов нужно брать знак «-», а для индуктивных «+».

После замены всей цепи одним эквивалентным двухполюсником определяется его полное сопротивление и фазовый угол:

$$z_3 = \sqrt{R_3^2 + x_3^2}; \quad \varphi_3 = \arctg \frac{x_3}{R_3}.$$

Затем рассчитывают действующее значение и начальную фазу входного тока и записывают его мгновенное значение.

Пример: пусть в схеме рис.26 действует ЭДС $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$. Определить входной ток $i_1(t)$.

$$g_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + 1/(\omega \cdot C_2)^2}; \quad b_2 = \frac{-1/(\omega \cdot C_2)}{R_2^2 + 1/(\omega \cdot C_2)^2};$$

$$g_3 = \frac{1}{R_3}; \quad b_3 = 0; \quad g_{23} = g_2 + g_3; \quad b_{23} = b_2;$$

$$R_{23} = \frac{g_{23}}{g_{23}^2 + b_{23}^2}; \quad x_{23} = \frac{b_{23}}{g_{23}^2 + b_{23}^2};$$

$$R_3 = R_1 + R_{23}; \quad x_3 = \omega \cdot L_1 + x_{23}; \quad z_3 = \sqrt{R_3^2 + x_3^2}; \quad \varphi_3 = \arctg(x_3 / R_3);$$

$$I_m = E_m / z_3; \quad \psi_i = \psi - \varphi_3; \quad i_1(t) = I_m \sin(\omega \cdot t + \psi_i).$$

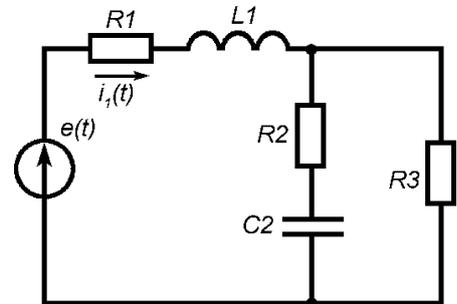


Рис.26

Мощность в цепи синусоидального тока

Рассмотрим участок электрической цепи, напряжение и ток которого равняются соответственно: $u(t) = U_m \sin \omega t$; $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$, т.е. ток отстает от напряжения (индуктивный характер цепи). Мгновенная мощность, поступающая в цепь равна:

$$p(t) = u(t)i(t) = U_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) = UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)].$$

Она имеет две составляющие: постоянную $UI \cdot \cos \varphi$ и гармоническую с

удвоенной угловой частотой относительно напряжения и тока. *Активная мощность*, поступающая в цепь будет равна:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi,$$

так как среднее значение второго слагаемого за период равно нулю.

Множитель $\cos \varphi$ называется *коэффициентом мощности*. Таким образом, активная мощность равна произведению действующих значений напряжения и тока, умноженному на коэффициент мощности. Чем меньше φ , тем ближе будет коэффициент мощности к 1 ($\cos \varphi \rightarrow 1$) и тем большей при заданных U и I будет активная мощность, передаваемая источником к приемнику. Повышение коэффициента мощности промышленных электроустановок является достаточно важной технико-экономической задачей. В последнее время требования к $\cos \varphi$ появились даже для относительно маломощных (десятки-сотни Вт) импульсных источников электропитания (ИВЭП), которые питают персональные компьютеры и другую радиоэлектронную аппаратуру. Для повышения $\cos \varphi$ в маломощных системах используют специальные устройства PFC (power factor control) корректоры. Активную мощность можно определить также по формулам:

$$P = RI^2 = zI^2 \cos \varphi = yU^2 \cos \varphi = gU^2,$$

или через активные составляющие напряжения и тока: $P = U_a I = UI_a$.

Приведенные выражения для мгновенной и активной мощностей могут быть применены также к ранее рассмотренным частным случаям когда $\varphi = 0$; $\varphi = \pi/2$; $\varphi = -\pi/2$.

Рассмотрим активно-индуктивную цепь ($0 < \varphi < \pi/2$; $0 < \cos \varphi < 1$). Временные диаграммы показаны на рис.27. Мгновенная мощность изменяется с угловой частотой 2ω относительно постоянной составляющей $P = UI \cos \varphi$.

В промежутки времени, когда $u(t)$ и $i(t)$ имеют одинаковые знаки, мгновенная мощность положительна (энергия поступает от источника к приемнику, превращаясь в теплоту в активном сопротивлении и накапливаясь в магнитном поле индуктивности). В промежутки времени, когда $u(t)$ и $i(t)$ имеют различные знаки, мгновенная мощность отрицательна и энергия частично возвращается от приемника в источник. Аналогичные процессы протекают в случае активно-емкостной цепи ($-\pi/2 < \varphi < 0$).

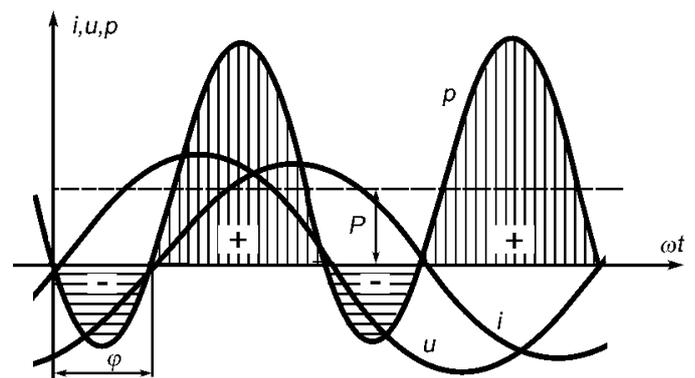


Рис.27

Величина, равная произведению действующих значений тока и напряжения, называется *полной мощностью*:

$$S = UI \quad [\text{ВА}].$$

Очевидно, что коэффициент мощности можно выразить через активную и

полную мощности: $\cos \varphi = P / S$.

При расчете электрических цепей, а также на практике используют понятие **реактивная мощность**: $Q = UI \sin \varphi$ [ВАр].

Реактивная мощность является мерой потребления или генерации реактивного тока. Справедливы также следующие соотношения:

$$Q = xI^2 = zI^2 \sin \varphi = yU^2 \sin \varphi = bU^2 = UI_p = U_p I.$$

Отсюда видно, что: $S^2 = P^2 + Q^2$; $\sin \varphi = Q / S$; $\operatorname{tg} \varphi = Q / P$.

Реактивная мощность положительна при $\varphi > 0$ (индуктивный характер цепи) и отрицательна при $\varphi < 0$ (емкостной характер цепи).

Графически связь между P , Q , S можно представить в виде прямоугольного треугольника - треугольника мощностей (рис.28). На щитке любого источника электрической энергии переменного тока указывают значение полной мощности S , которую этот источник может отдать потребителю, если последний работает с $\cos \varphi = 1$ (чисто активное сопротивление).

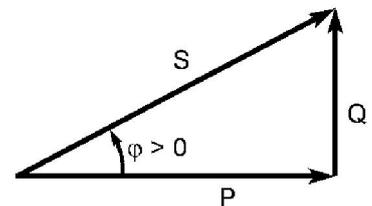


Рис.28

Комплексная форма записи мощностей

Допустим, что в электрической цепи проходит синусоидальный ток, причем положительные направления тока и напряжения совпадают (рис.29): $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$; $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

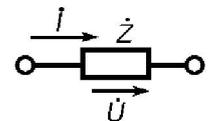


Рис.29

Комплексные токи и напряжения равняются соответственно:

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i}; \quad \dot{U} = U e^{j\psi_u}; \quad (I = I_m / \sqrt{2}; \quad U = U_m / \sqrt{2}).$$

Сдвиг фаз тока относительно напряжения равен разности начальных фаз:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i.$$

Умножим комплекс напряжения \dot{U} на комплексно сопряженное значение тока $\dot{I}^* = I e^{-j\psi_i}$:

$$\dot{U} \dot{I}^* = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = UI e^{j(\psi_u - \psi_i)} = UI e^{j\varphi}.$$

Таким образом, **мощность в комплексной форме (комплексная мощность)** определяется выражением:

$$\dot{S} = \dot{U} \dot{I}^* = UI e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi = P + jQ.$$

Комплексная мощность определяет действительной частью активную мощность, а мнимой частью - реактивную мощность, поступающую в цепь. Модуль комплексной мощности равен полной мощности.

Если комплексно сопряженное значение напряжения \dot{U}^* умножить на комплекс тока \dot{I} , то получим:

$$\dot{U}^* \dot{I} = U e^{-j\psi_u} I e^{j\psi_i} = UI e^{-j(\psi_u - \psi_i)} = UI e^{-j\varphi} = UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi = P - jQ = \dot{S}^*.$$

Следовательно мощности P и Q можно записать в виде:

$$P = \frac{1}{2}(\dot{U} \dot{I}^* + \dot{U}^* \dot{I}); \quad Q = \frac{1}{2j}(\dot{U} \dot{I}^* - \dot{U}^* \dot{I}).$$

Кроме того справедливы соотношения:

$$\dot{S} = \dot{U} \dot{I}^* = \dot{Z} \dot{I} \dot{I}^* = \dot{Z} I^2 = (R + jx)I^2 = Ze^{j\varphi} \cdot I^2;$$

$$Z = \sqrt{R^2 + x^2}; \quad \dot{Z} = R + jx = \frac{\dot{S}}{I^2} = \frac{\dot{U} \dot{I}^*}{I^2};$$

$$\dot{S} = \dot{U} \dot{I}^* = \dot{U} \dot{U}^* \dot{Y} = \dot{Y} U^2 = (g + jb)U^2 = ye^{j\varphi} \cdot U^2;$$

$$\dot{Y} = \frac{\dot{S}}{U^2} = \frac{\dot{U} \dot{I}^*}{U^2} = \frac{P}{U^2} - j \frac{Q}{U^2} = ye^{-j\varphi}; \quad y = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

Комплексная мощность источника ЭДС (рис.30):

$$\dot{S} = \dot{E} \dot{I}^*.$$

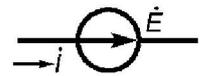


Рис.30

Компенсация реактивной мощности (сдвига фаз).

Входное сопротивление большинства потребителей электрической энергии имеет индуктивный характер. Для того, чтобы уменьшить потребляемый нагрузкой ток и уменьшить потери энергии в генераторе и подводящих проводах, параллельно приемнику энергии включают батарею конденсаторов (рис.31, а). Потребляемый ток уменьшается за счет уменьшения его реактивной составляющей (уменьшается реактивная мощность $Q = UI_p$, повышается $\cos \varphi$).

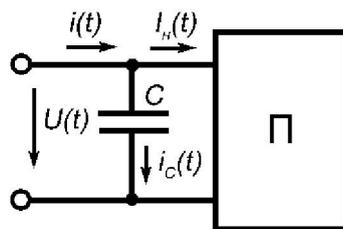
Уменьшения угла сдвига фаз между напряжением на приемнике и током, потребляемым от генератора, называют **компенсацией сдвига фаз** (**компенсацией реактивной мощности**). Векторная диаграмма, поясняющая принцип действия компенсирующей батареи конденсаторов приведена на рис.31,б.

$$I_C = \omega C \cdot U = U/x_C;$$

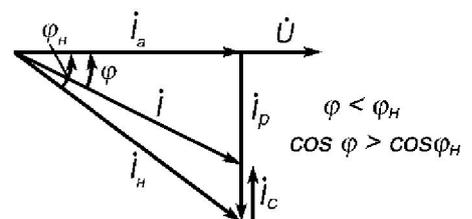
$$i = i_H + i_C;$$

$$I_a = I_H \cos \varphi_H;$$

$$I_p = I_H \sin \varphi_H.$$



а)



б)

Рис.31

Экономически выгодно подключать конденсаторную батарею на более высокое напряжение. Можно подобрать такой конденсатор, что реактивная составляющая тока нагрузки I_p будет равняться току емкости I_c . При этом $\varphi=0$ ($\cos\varphi=1$), т.е. происходит полная компенсация реактивной мощности. Если, $I_c > I_p$ то это приводит к перекомпенсации, что уменьшает $\cos\varphi$. Обычно сдвиг фаз доводят до значений $\cos\varphi=0,9 \div 0,95$ ($\varphi=25^\circ \div 18^\circ$).

Конденсаторную батарею можно включать и последовательно (рис.32) с активной-индуктивной нагрузкой (уменьшается реактивная составляющая напряжения генератора):

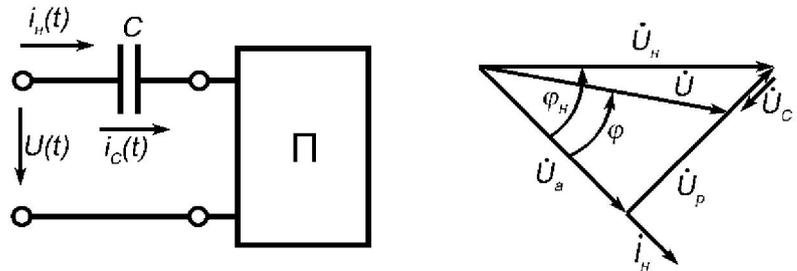


Рис.32

$$\dot{U} = \dot{U}_H + \dot{U}_C; \quad U_C = I_H X_C = \frac{I_H}{\omega C}; \quad \varphi_H > \varphi; \quad \cos \varphi_H < \cos \varphi.$$

Условие передачи максимальной активной мощности от источника в приемник

К источнику энергии с входным (внутренним) сопротивлением $\dot{z}_o = R_o + jx_o$ подключена нагрузка $\dot{z} = R + jx$ (рис.33). Необходимо подобрать параметры нагрузки (R, x) таким образом, чтобы при заданном внутреннем сопротивлении источника \dot{z}_o обеспечить передачу максимально возможной активной мощности от источника к приемнику. Активная мощность, которая потребляется нагрузкой, равняется:

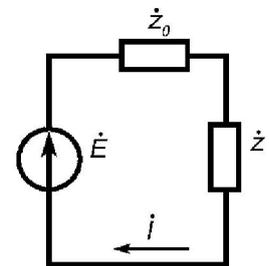


Рис.33

$$P = RI^2 = \frac{RE^2}{|z_0 + z|^2} = \frac{RE^2}{(R + R_0)^2 + (x + x_0)^2}.$$

Для произвольного значения сопротивления R ток, а следовательно и активная мощность, достигнут максимальных значений, если:

$$(x + x_0) = 0 \Rightarrow (x = -x_0) .$$

При этом получаем: $P = \frac{RE^2}{(R + R_0)^2}; \quad \frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow R = R_0.$

Таким образом, условием передачи максимальной активной мощности от источника к приемнику будет:

$$\dot{z}_0 = \dot{z}^*.$$

Сопротивление нагрузки должно быть комплексно сопряжённым к внутреннему сопротивлению источника. При выполнении этого условия приемник потребляет мощность:

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4R},$$

а коэффициент полезного действия, который определяется как отношение активной мощности к полной мощности, которую отдаёт источник, будет равняться $\eta = 0,5$.

Можно показать, что передача максимальной полной мощности к нагрузке при заданном $\cos\varphi$ достигается при равенстве полных сопротивлений нагрузки и источника: $z_0 = z$. При этом мощность тем больше, чем больше по абсолютной величине разность углов сопротивлений нагрузки и источника ($\varphi - \varphi_0$):

$$S_{\max} = \frac{E^2}{2z_0[1 + \cos(\varphi - \varphi_0)]}.$$

Полная мощность в нагрузке:

$$S = UI = zI^2 = \frac{zE^2}{\left| \dot{z}_0 + \dot{z} \right|^2} = \frac{zE^2}{\left| z_0 e^{j\varphi_0} \left[1 + \frac{z}{z_0} e^{j(\varphi - \varphi_0)} \right] \right|^2}.$$

С учетом того, что модуль произведения равен произведению модулей, для знаменателя можно записать:

$$\begin{aligned} \left| z_0 e^{j\varphi_0} \left(1 + \frac{z}{z_0} e^{j(\varphi - \varphi_0)} \right) \right|^2 &= z_0^2 \cdot \left| 1 + \frac{z}{z_0} e^{j(\varphi - \varphi_0)} \right|^2 = \\ &= z_0^2 \cdot \left[\left(1 + \frac{z}{z_0} \cos(\varphi - \varphi_0) \right)^2 + \left(\frac{z}{z_0} \sin(\varphi - \varphi_0) \right)^2 \right] = \\ &= z_0^2 \cdot \left[1 + 2 \frac{z}{z_0} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 (\cos^2(\varphi - \varphi_0) + \sin^2(\varphi - \varphi_0)) \right] = \\ &= z_0^2 \cdot \left[1 + 2 \frac{z}{z_0} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Тогда :

$$S = \left(\frac{E}{z_0} \right)^2 \cdot \frac{z}{1 + 2 \frac{z}{z_0} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2}.$$

Условием экстремума функции $S(z)$ является:

$$\frac{dS}{dz} = \left(\frac{E}{z_0}\right)^2 \cdot \frac{1 + 2\frac{z}{z_0}\cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 - z \left[2\frac{1}{z_0}\cos(\varphi - \varphi_0) + 2\frac{z}{z_0^2} \right]}{\left(1 + 2\frac{z}{z_0}\cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right)^2} = 0.$$

Рассмотрим числитель:

$$1 + 2\frac{z}{z_0}\cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 - 2\frac{z}{z_0}\cos(\varphi - \varphi_0) - 2\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 = 1 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 = 0 \Rightarrow z = z_0.$$

При условии $z = z_0$:
$$S_{\max} = \frac{E^2}{2z_0[1 + \cos(\varphi - \varphi_0)]}.$$

Измерение мощности ваттметром

Ваттметр имеет две обмотки: обмотку тока и обмотку напряжения. Обмотка тока имеет малое сопротивление и включается в цепь последовательно подобно амперметру. Обмотка напряжения имеет большое сопротивление и включается в цепь параллельно подобно вольтметру. Концы одноименных зажимов обмоток обозначают звездочками (рис.34,а).

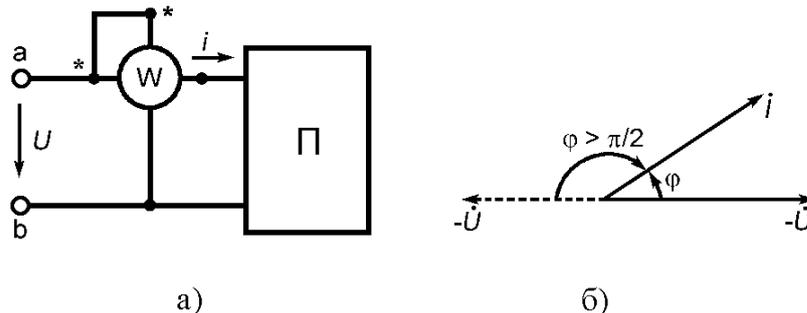


Рис.34

Показания ваттметра пропорциональны $U_{ab}I \cos(\widehat{U_{ab} I})$. Важно следить за согласованным включением обмоток (как показано на рис.34, а), потому что иначе стрелка ваттметра будет отклоняться в противоположном направлении. Цена деления шкалы ваттметра определяется как частное от деления произведения номинальных значений напряжения и тока на количество делений шкалы.

На знак угла сдвига фаз (характер цепи) ваттметр не реагирует, потому что $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$.

Опытное определение эквивалентных параметров пассивных двухполюсников.

Для опытного определения параметров двухполюсника используют вольтметр, амперметр, фазометр (измеритель сдвига фаз) или осциллограф. Схема для проведения опытов представлена на рис.35, а.

Фазометр имеет две обмотки: тока и напряжения. Согласованное включение обмоток такое же, как и у ваттметра. Если поменять местами например зажимы обмотки напряжения, то вместо угла φ фазометр будет показывать угол φ' (рис.35,б).

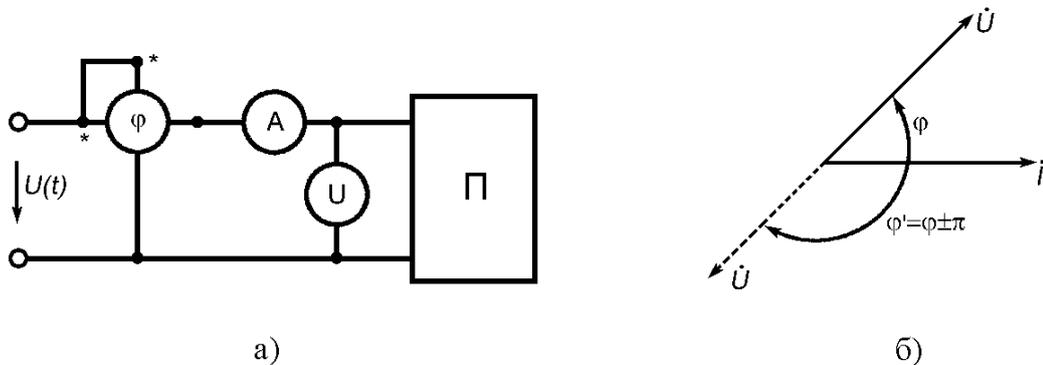


Рис.35

Полное сопротивление цепи можно определить по показаниям вольтметра и амперметра: $z = U/I$.

Определив угол φ , находим активное и реактивное сопротивления цепи:

$$R = z \cos \varphi; \quad x = z \sin \varphi.$$

Если вместо фазометра используется ваттметр, то параметры двухполюсника можно определить таким образом:

$$z = U/I; \quad R = P/I^2; \quad x = \pm \sqrt{z^2 - R^2}.$$

Необходимо определить знак реактивного сопротивления (характер цепи). Для этого последовательно с двухполюсником включают емкость, причем должно выполняться условие $x_c < 2|x|$. Если показания ваттметра возрастут ($\cos \varphi \uparrow; I \uparrow; z \downarrow; P \uparrow$), то характер цепи индуктивный ($x > 0$). Емкость с реактивным сопротивлением $x_c > 2|x|$ применять нельзя, поскольку в этом случае может произойти перекомпенсация и вывод о характере двухполюсника может быть неверным.

Емкость можно включать также параллельно двухполюснику. Если при этом ток уменьшается, то характер двухполюсника индуктивный ($x > 0$).

Параметры двухполюсника R, x, g, b зависят от частоты. Таким образом, если частота изменилась, их нужно находить вновь.

Знаки мощностей и направления передачи энергии.

Рассмотрим два активных двухполюсника, которые соединены между собой (рис.36). Допустим, что передача энергии в зависимости от режима работы может происходить как от A1 к A2, так и от A2 к A1. Выбранные положительные направления тока и напряжения совпадают в двухполюснике A2 и противоположны в A1. При

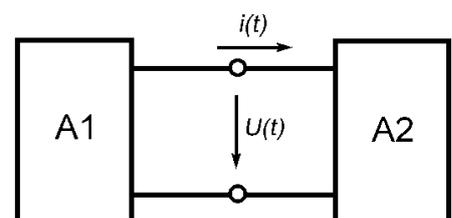


Рис.36

этом, если $P > 0$, то A1 - отдает энергию, а A2 - потребляет ее. Если $P < 0$, то наоборот, A1 - потребляет энергию, а A2 - отдает.

Направление передачи энергии можно установить, например, при помощи ваттметров (рис.37, а). В зависимости от режима цепи вектор тока может находиться в любом квадранте (рис.37, б).

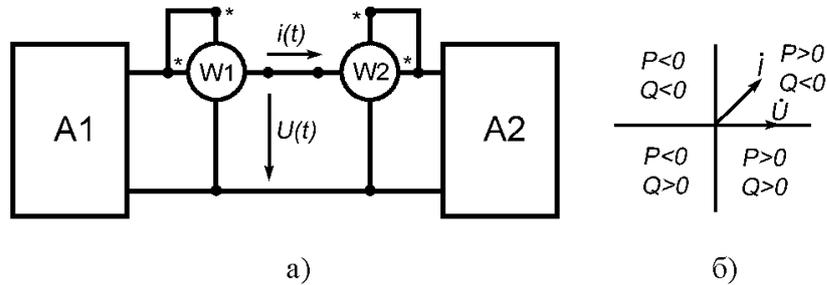


Рис.37

Если $P_1 > 0$, а $P_2 < 0$ ($P_1 = -P_2$), то стрелка ваттметра W1 отклоняется по шкале, а W2 - в противоположную сторону. Это значит, что энергия передается от двухполюсника A1 к двухполюснику A2. Сдвиг фаз между напряжением и током для ваттметра W1 меньше $\pi/2$ (рис.38,а).

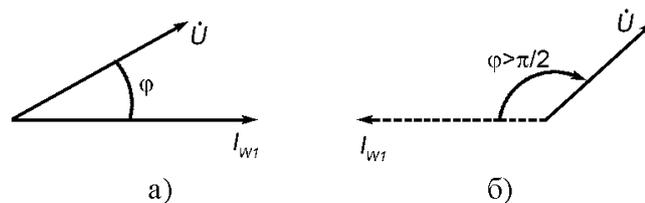


Рис.38

Если $P_1 < 0$, а $P_2 > 0$, то энергия передается от A2 к A1. Таким образом, по показаниям ваттметров можно определить не только мощность, но и направление передачи энергии. Для этого необходимо знать фазировку ваттметров и как они включены в цепь.

Умножение вектора на «j» и на «-j».

Пусть есть некоторый вектор: $\dot{A} = Ae^{j\varphi}$. Умножение этого вектора на «j» дает вектор с модулем A, но повернутый на угол $\pi/2$ в положительном направлении (против хода часовой стрелки) по отношению к начальному вектору \dot{A} (рис.39). Умножение вектора на «-j» поворачивает вектор на угол $-\pi/2$ (по часовой стрелке).

Представим векторы «j» и «-j» в показательной форме:

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}; \quad -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Тогда: $j \dot{A} = e^{j\frac{\pi}{2}} Ae^{j\varphi} = Ae^{j(\varphi+\frac{\pi}{2})}; \quad -j \dot{A} = e^{-j\frac{\pi}{2}} Ae^{j\varphi} = Ae^{j(\varphi-\frac{\pi}{2})}.$

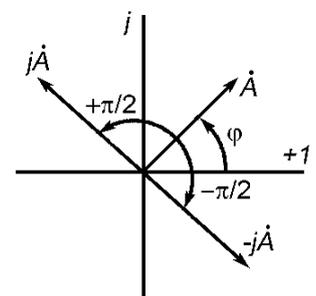


Рис.39

Что и нужно было доказать.

Комплексное изображение производной и интеграла от синусоидальных функций.

Синусоидальную функцию в комплексной (символической) форме изображают в виде:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \rightarrow I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = \dot{I}_m e^{j\omega t}.$$

Каким будет изображение производной $di(t)/dt$ - ?

$$\frac{di(t)}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \omega I_m \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}) \rightarrow \omega I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t}$$

Таким образом, дифференцированию синусоидальной функции соответствует умножение ее комплексного изображения на $j\omega$.

Можно показать, что интегрирование синусоидальной функции соответствует делению ее комплексного изображения на $j\omega$, то есть:

$$\int i(t) dt \rightarrow \frac{\dot{I}_m e^{j\omega t}}{j\omega}.$$

Доказать самостоятельно.

Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме.

Рассмотрим цепь на рис.40. Для мгновенных значений напряжений по второму закону Кирхгофа можно записать:

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = e(t)$$

или

$$i(t)R + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t).$$

Представим это уравнение в комплексной форме:

$$\dot{I}_m R + j\omega L \dot{I}_m + \frac{\dot{I}_m}{j\omega C} = \dot{E}_m,$$

или

$$\dot{I}_m (R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}) = \dot{E}_m.$$

Тогда закон Ома можно записать в виде:

$$\frac{\dot{E}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jx = ze^{j\varphi} = \dot{Z}.$$

Для проводимостей будет верным:

$$\dot{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{ze^{j\varphi}} = \frac{1}{z} e^{-j\varphi} = ye^{-j\varphi} = g - jb; \quad \dot{I}_m = \dot{Y} \dot{U}_m; \quad \dot{I} = \dot{Y} \dot{U}.$$

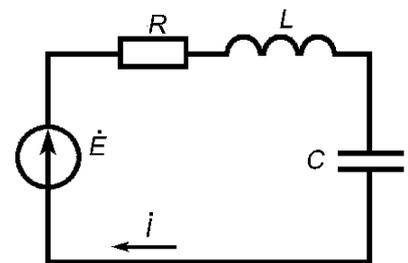


Рис.40

По первому закону Кирхгофа, алгебраическая сумма мгновенных значений токов, сходящихся к узлу равна нулю: $\sum_k i_k(t) = 0$.

Если перейти от мгновенных значений токов к их комплексным изображениям, то получим:

$$\sum_k \dot{I}_k e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \sum_k \dot{I}_k = 0.$$

Т.к. для любого t выполняется условие: $e^{j\omega t} \neq 0$, то $\sum_k \dot{I}_k = 0$.

Алгебраическая сумма комплексных значений токов, сходящихся к узлу, равна нулю.

Пусть замкнутый контур содержит n ветвей и каждая k -тая ветвь содержит источник ЭДС e_k , активное сопротивление R_k , индуктивность L_k и емкость C_k . Тогда по второму закону Кирхгофа можно записать:

$$\sum_{k=1}^n \left(i_k(t) R_k + L_k \frac{di_k(t)}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k(t) dt \right) = \sum_{k=1}^n e_k(t) \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^n \dot{I}_k Z_k = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k.$$

Алгебраическая сумма комплексных значений ЭДС, действующих в контуре, равна алгебраической сумме комплексных значений падений напряжений на элементах этого контура.

Законы Кирхгофа выполняются для мгновенных и комплексных значений, но не для амплитудных и действующих значений токов и напряжений !!!

Баланс мощностей.

В любой электрической цепи активная мощность, генерируемая источниками, равна активной мощности, потребляемой всеми приемниками (нагрузками). Можно показать, что и сумма реактивных мощностей, которые отдаются источниками, равна сумме реактивных мощностей, которые потребляются нагрузками.

Для электрической цепи, имеющей q узлов, можно записать по первому закону Кирхгофа $(q - 1)$ уравнение:

$$\dot{I}_{k1} + \dot{I}_{k2} + \dots + \dot{I}_{k,q-1} + \dot{I}_{kq} = 0; \quad k = \overline{1, (q-1)};$$

где положительные направления всех токов приняты от k -го узла к узлам $1, 2, 3, \dots, q$.

Умножим каждое из этих уравнений на комплексное значение напряжения с положительным направлением от соответствующего узла к q -му узлу и просуммируем эти произведения:

$$\begin{aligned} & \dot{U}_{1q} \left(\dot{I}_{12} + \dot{I}_{13} + \dots + \dot{I}_{1q} \right) + \dot{U}_{2q} \left(\dot{I}_{21} + \dot{I}_{23} + \dots + \dot{I}_{2q} \right) + \dots \\ & + \dot{U}_{q-1,q} \left(\dot{I}_{q-1,1} + \dot{I}_{q-1,2} + \dots + \dot{I}_{q-1,q} \right) = 0 \end{aligned}$$

С учетом того, что $\dot{U}_{kq} - \dot{U}_{mq} = \dot{U}_{km}$; $\dot{I}_{km} = -\dot{I}_{mk}$ будем иметь:

$$\dot{U}_{12} \dot{I}_{12} + \dot{U}_{13} \dot{I}_{13} + \dots + \dot{U}_{q-1,q} \dot{I}_{q-1,q} = 0.$$

Сумма комплексных мощностей, потребленных всеми ветвями электрической цепи, равна нулю. Следовательно, равны нулю алгебраические суммы действительных и мнимых частей мощностей (т.е. активных и реактивных мощностей).

Поскольку отрицательные мощности являются мощностями, которые отдаются (считали, что $u(t)$ и $i(t)$ совпадают по направлению), то отсюда следует закон баланса как активных, так и реактивных мощностей.

Расчет сложных электрических цепей синусоидального тока символическим (комплексным) методом.

Все ранее рассмотренные методы расчета цепей постоянного тока базируются на 1-м и 2-м законах Кирхгофа. Поскольку эти фундаментальные законы верны и для цепей синусоидального тока (для мгновенных и комплексных значений), то при отсутствии взаимной индукции между ветвями цепи, все расчетные формулы методов постоянного тока пригодны и для цепей синусоидального тока. При этом вместо постоянных токов, ЭДС и сопротивлений необходимо использовать комплексные значения соответствующих величин.

Расчет электрических цепей синусоидального тока при наличии ветвей со взаимной индукцией имеет ряд особенностей, которые будут рассмотрены позже.

Применение символического метода рассмотрим на примерах.

Метод контурных токов.

Рассмотрим схему рис.41. Если составить уравнения для мгновенных значений, то получим систему интегрально-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt}; & u_C(t) &= \frac{1}{C} \int i(t) dt; \\ i_L(t) &= \frac{1}{L} \int u_L(t) dt; & i_C(t) &= C \frac{du_C(t)}{dt}. \end{aligned}$$

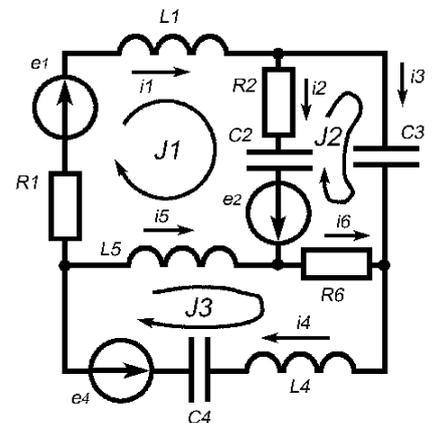


Рис.41

Перейдем от заданной схемы к эквивалентной схеме в комплексной форме (рис.42). При этом все величины представляются соответствующими комплексными значениями.

Исходная система уравнений может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \dot{Z}_{11} \dot{J}_1 + \dot{Z}_{12} \dot{J}_2 + \dot{Z}_{13} \dot{J}_3 = \dot{E}_{11}; \\ \dot{Z}_{21} \dot{J}_1 + \dot{Z}_{22} \dot{J}_2 + \dot{Z}_{23} \dot{J}_3 = \dot{E}_{22}; \\ \dot{Z}_{31} \dot{J}_1 + \dot{Z}_{32} \dot{J}_2 + \dot{Z}_{33} \dot{J}_3 = \dot{E}_{33}. \end{cases}$$

$$\dot{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_5; \quad \dot{Z}_{22} = R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{1}{j\omega C_3} + R_6;$$

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} = -\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right); \quad \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_{32} = -R_6; \quad \dot{Z}_{13} = \dot{Z}_{31} = -j\omega L_5;$$

$$\dot{Z}_{33} = j\omega L_5 + R_6 + j\omega L_4 + \frac{1}{j\omega C_4}; \quad \dot{E}_{11} = \dot{E}_1 + \dot{E}_2; \quad \dot{E}_{22} = -\dot{E}_2; \quad \dot{E}_{33} = -\dot{E}_4.$$

Решением системы линейных алгебраических уравнений будут контурные токи: $\dot{J}_1, \dot{J}_2, \dot{J}_3$.

Токи ветвей определяем через соответствующие контурные токи:

$$\dot{I}_1 = \dot{J}_1; \quad \dot{I}_2 = \dot{J}_1 - \dot{J}_2; \quad \dot{I}_3 = \dot{J}_2; \quad \dot{I}_4 = \dot{J}_3; \quad \dot{I}_5 = \dot{J}_3 - \dot{J}_1; \quad \dot{I}_6 = \dot{J}_3 - \dot{J}_2.$$

Составим баланс мощностей:

$$E_1 I_1 \cos \varphi_1 + E_2 I_2 \cos \varphi_2 - E_4 I_4 \cos \varphi_4 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_6 I_6^2;$$

$$E_1 I_1 \sin \varphi_1 + E_2 I_2 \sin \varphi_2 - E_4 I_4 \sin \varphi_4 = \omega L_1 I_1^2 - \frac{I_2^2}{\omega C_2} - \frac{I_3^2}{\omega C_3} + \left(\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4}\right) I_4^2 + \omega L_5 I_5^2.$$

Метод узловых потенциалов.

Применим для расчета токов в приведенной выше цепи метод узловых потенциалов. Примем $\dot{\varphi}_4 = 0$. Тогда исходная система уравнений будет иметь такой вид:

$$\begin{cases} \dot{Y}_{11} \dot{\varphi}_1 - \dot{Y}_{12} \dot{\varphi}_2 - \dot{Y}_{13} \dot{\varphi}_3 = \dot{J}_{11}; \\ -\dot{Y}_{21} \dot{\varphi}_1 + \dot{Y}_{22} \dot{\varphi}_2 - \dot{Y}_{23} \dot{\varphi}_3 = \dot{J}_{22}; \\ -\dot{Y}_{31} \dot{\varphi}_1 - \dot{Y}_{32} \dot{\varphi}_2 + \dot{Y}_{33} \dot{\varphi}_3 = \dot{J}_{33}. \end{cases}$$

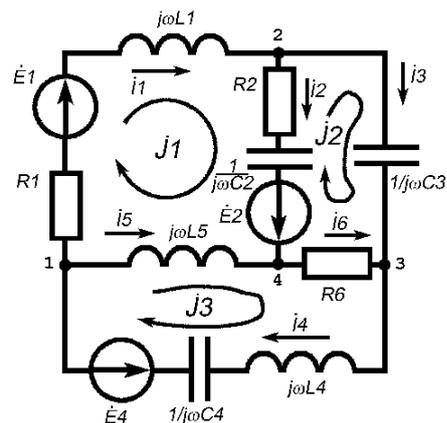


Рис.42

Собственные и взаимные проводимости узлов, а также задающие токи определяем следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{11} &= \frac{1}{R_1 + j\omega L_1} + \frac{1}{j(\omega L_4 - 1/\omega C_4)} + \frac{1}{j\omega L_5}; \quad \dot{Y}_{12} = \dot{Y}_{21} = \frac{1}{R_1 + j\omega L_1}; \\ \dot{Y}_{13} = \dot{Y}_{31} &= \frac{1}{j(\omega L_4 - 1/\omega C_4)}; \quad \dot{Y}_{22} = \frac{1}{R_1 + j\omega L_1} + \frac{1}{R_2 - j/\omega C_2} + j\omega C_3; \\ \dot{Y}_{23} = \dot{Y}_{32} &= j\omega C_3; \quad \dot{Y}_{33} = j\omega C_3 + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{j(\omega L_4 - 1/\omega C_4)}; \\ \dot{J}_{11} &= \frac{-\dot{E}_1}{R_1 + j\omega L_1} - \frac{\dot{E}_4}{j(\omega L_4 - 1/\omega C_4)}; \quad \dot{J}_{22} = \frac{\dot{E}_1}{R_1 + j\omega L_1} - \frac{\dot{E}_2}{R_2 - j/\omega C_2}; \\ \dot{J}_{33} &= \frac{\dot{E}_4}{j(\omega L_4 - 1/\omega C_4)}. \end{aligned}$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений и находим потенциалы узлов схемы $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$. Определяем токи ветвей по закону Ома:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 + \dot{E}_1}{\dot{Z}_1}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_4 + \dot{E}_2}{\dot{Z}_2}; \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_4}{\dot{Z}_3}; \quad \dot{I}_4 = \frac{\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1 - \dot{E}_4}{\dot{Z}_4}; \quad \dot{I}_5 = \frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{Z}_5}; \\ \dot{I}_6 &= \frac{-\dot{\varphi}_3}{\dot{Z}_6}; \quad \dot{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = R_1 + jx_{L1}; \quad \dot{Z}_2 = R_2 - \frac{j}{\omega C_2} = R_2 - jx_{C2}; \quad \dot{Z}_3 = \frac{1}{j\omega C_3} = \frac{-j}{\omega C_3} = \\ &= -jx_{C3}; \quad \dot{Z}_4 = j\omega L_4 + \frac{1}{j\omega C_4} = j\left(\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4}\right) = j(x_{L4} - x_{C4}); \quad \dot{Z}_5 = j\omega L_5; \quad \dot{Z}_6 = R_6. \end{aligned}$$

Топографические диаграммы.

Потенциалы точек цепи синусоидального тока могут быть выражены комплексными числами, а следовательно представлены на комплексной плоскости точками или векторами, которые направлены из начала координат в определенную точку плоскости (рис.43). При этом вектор напряжения \dot{U}_{ab} имеет направление от точки b к точке a (по правилу вычитания векторов):

$$\dot{U}_{ab} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b; \quad \dot{U}_{ba} = -\dot{U}_{ab} = \dot{\varphi}_b - \dot{\varphi}_a.$$

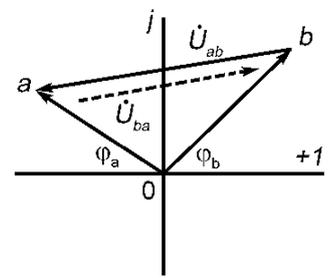


Рис.43

Совокупность точек на комплексной плоскости, которые изображают комплексные потенциалы одноименных точек электрической схемы, называют **топографической диаграммой**.

При построении топографической диаграммы потенциал одной из точек схемы

(если специально не оговорено, то любой) принимают равным нулю. На диаграмме эту точку располагают в начале координат. Расположение других точек на диаграмме определяется параметрами элементов цепи, ЭДС и токами. Порядок чередования точек на топографической диаграмме должен соответствовать порядку их чередования в схеме.

Пример: построить топографическую диаграмму для схемы, которая изображена на рис.44,а.

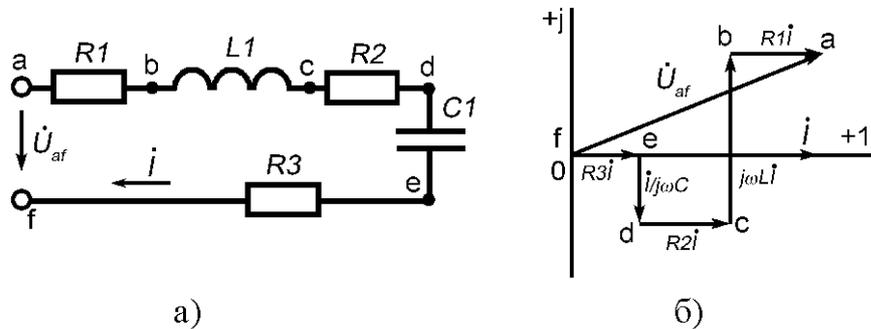


Рис.44

Принимаем $\dot{\varphi}_f = 0$, выбираем направление вектора тока \dot{I} совпадающим с действительной осью. Определяем потенциалы точек схемы:

$$\dot{\varphi}_e = R_3 \dot{I}; \dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_e + \frac{1}{j\omega C_1} \dot{I} = \dot{\varphi}_e - \frac{j\dot{I}}{\omega C_1}; \dot{\varphi}_c = \dot{\varphi}_d + R_2 \dot{I}; \dot{\varphi}_b = \dot{\varphi}_c + j\omega L_1 \dot{I}; \dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_b + R_1 \dot{I}.$$

Строим соответствующие векторы на топографической диаграмме (рис.44,б).

Расчет цепей синусоидального тока методом векторных диаграмм.

Векторные диаграммы токов и напряжений дают наглядное представление о фазовом расположении различных векторов токов и напряжений. Аналитические расчеты электрических цепей синусоидального тока рекомендуется сопровождать построением векторных диаграмм, чтобы иметь возможность качественно контролировать эти расчеты. Качественный контроль состоит в сопоставлении направлений различных векторов на комплексной плоскости, которые получены в результате аналитических расчетов, с учетом физического смысла: напряжение на индуктивности \dot{U}_L должно опережать ток \dot{I}_L на угол $\pi/2$, напряжение на емкости \dot{U}_C - отставать от тока \dot{I}_C на угол $\pi/2$, а на активном сопротивлении напряжение и ток должны совпадать по фазе. Если аналитические расчеты дают результаты, которые не соответствуют таким очевидным положениям, то в расчетах есть ошибка.

Векторные диаграммы довольно часто используют как метод расчета в сочетании с методом пропорционального перерасчета.

Пример:

Задано напряжение $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$ и параметры электрической цепи (рис.45,а). Провести расчет цепи методом векторных диаграмм.

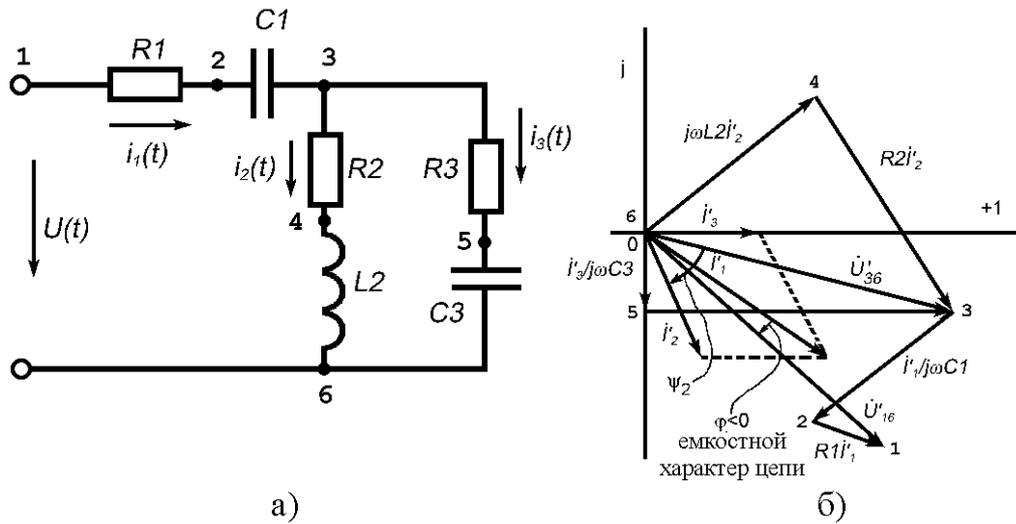


Рис.45

Произвольно задаемся током в наиболее удаленной от источника (входа схемы) ветви $\dot{I}'_3 = 1A$. Принимаем потенциал шестой точки за ноль $\dot{\phi}_6 = 0$. Определяем потенциалы остальных точек и токи в ветвях:

$$\dot{\phi}'_5 = \dot{I}'_3 / j\omega C_3; \dot{\phi}'_3 = \dot{\phi}'_5 + R_3 \dot{I}'_3; \dot{I}'_2 = \dot{U}'_{36} / j\omega L_2; \dot{I}'_2 = U'_{36} / \sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2};$$

$$\psi_2 = \arctg(\omega L_2 / R_2); \dot{I}'_1 = \dot{I}'_2 + \dot{I}'_3; \dot{\phi}'_2 = \dot{\phi}'_3 + \dot{I}'_1 / j\omega C_1; \dot{\phi}'_1 = \dot{\phi}'_2 + R_1 \dot{I}'_1; \dot{\phi}'_4 = \dot{\phi}'_6 + j\omega L_2 \dot{I}'_2.$$

Строим соответствующие вектора на комплексной плоскости. Коэффициент перерасчета равняется $\dot{K} = \dot{U}'_{16} / \dot{U}'_{36} = Ke^{j\psi}$.

Метод эквивалентного генератора.

В цепи рис.46 \dot{U} - не изменяется; \dot{Z}_3 - изменяется от нуля до бесконечности. Определить сопротивления цепи \dot{Z}_1 и \dot{Z}_2 , при которых ток \dot{I}_3 не зависит от изменения сопротивления \dot{Z}_3 .

По методу эквивалентного генератора:

$$\dot{I}_3 = \dot{U}_{ab_{xx}} / (\dot{Z}_{ab} + \dot{Z}_3); \dot{Z}_{ab} = \dot{Z}_1 \dot{Z}_2 / (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2);$$

$$\dot{U}_{ab_{xx}} = \dot{U} \dot{Z}_2 / (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2); \dot{I}_3 = \dot{U} \dot{Z}_2 / \left[\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) \right].$$

Для того, чтобы ток \dot{I}_3 не зависел от \dot{Z}_3 , необходимо выполнение условия:

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = 0; \\ R_1 + jx_1 + R_2 + jx_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 + R_2 = 0; \\ x_1 + x_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = R_2 = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

Тогда $\dot{Z}_1 = jx_1; \dot{Z}_2 = jx_2 = -jx_1$. Следовательно, если $x_1 = \omega L$, то $x_2 = 1/\omega C$.

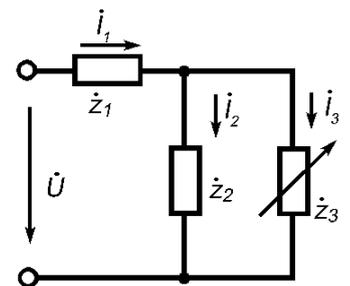


Рис.46

Отсюда вытекает: $\omega L = 1/\omega C$; $\omega = 1/\sqrt{LC} \Rightarrow x_1 = x_2 = \sqrt{L/C}$.

Этому условию соответствуют схемы Бушера (рис.47).

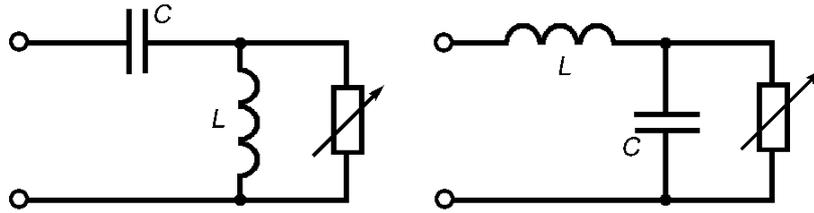


Рис.47

Цепи синусоидального тока с индуктивной связью.

Явление взаимной индукции, ЭДС взаимоиндукции.

Взаимная индуктивность.

Взаимной индукцией называется явление наведения ЭДС в контуре при изменении тока в другом контуре. Наведенную (индуцируемую) ЭДС называют **ЭДС взаимоиндукции** e_M .

Пусть есть два контура, которые удалены на определенное расстояние один от другого (рис.48). По контурам проходят токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$. Ток $i_1(t)$ образует магнитный поток $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$, который частично замыкается не сцепляясь со вторым контуром (Φ_{11}) и частично проходит через второй контур (Φ_{12}). Для наглядности на рисунке изображено только по одной силовой линии каждого из этих потоков. Ток $i_2(t)$ образует магнитный поток Φ_2 , который также проходит сквозь второй контур (Φ_{22}), а частично проходит через первый контур (Φ_{21}): $\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$.

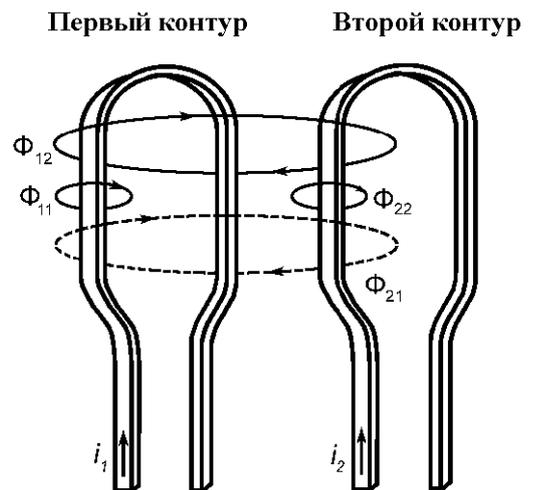


Рис.48

В общем случае контуры содержат w_1 и w_2 витков. При этом полные потокосцепления контуров будут равны:

$$\Psi_1 = w_1(\Phi_1 \pm \Phi_{21}) = \psi_1 \pm \psi_{21}; \quad \Psi_2 = w_2(\Phi_2 \pm \Phi_{12}) = \psi_2 \pm \psi_{12}.$$

Знак «+» имеет место, когда направление потока взаимоиндукции согласовано с направлением потока самоиндукции.

Взаимной индуктивностью называют отношение потокосцепления взаимной индукции к току, который его индуцировал:

$$M_{12} = w_2 \Phi_{12} / i_1; \quad M_{21} = w_1 \Phi_{21} / i_2; \quad [\text{Гн}].$$

Для линейных цепей $M_{12} = M_{21} = M$.

Свойство взаимности: если ток i_1 , проходящий в первом контуре,

обуславливает во втором контуре потокосцепление взаимной индукции $\psi_{12} = w_2 \Phi_{12}$, то равный ему ток i_2 , который проходит во втором контуре, обусловит в первом контуре потокосцепление взаимоиндукции $\psi_{21} = w_2 \Phi_{21}$ такой же величины.

Взаимная индуктивность пропорциональная количеству витков катушек, магнитной проницаемости сердечника, геометрическим размерам и взаимному расположению катушек.

Полные ЭДС, индуцируемые в контурах:

$$e_1 = -\frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}(\psi_1 \pm \psi_{21}) = -L_1 \frac{di_1}{dt} \mp M \frac{di_2}{dt} = e_{L1} + e_{M1}$$

$$e_2 = -\frac{d\Psi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}(\psi_2 \pm \psi_{12}) = -L_2 \frac{di_2}{dt} \mp M \frac{di_1}{dt} = e_{L2} + e_{M2}.$$

ЭДС взаимоиндукции:

$$e_{M1} = \mp M \frac{di_2}{dt}; \quad e_{M2} = \mp M \frac{di_1}{dt}.$$

Знак «-» при согласном направлении потоков самоиндукции и взаимоиндукции.

Цепи, в которых наводятся (индуцируются) ЭДС взаимоиндукции, называют индуктивно связанными.

Как элемент схемы замещения реальной цепи взаимная индуктивность M позволяет учитывать при расчетах явление взаимоиндукции и накопление энергии в магнитном поле магнитосвязанных катушек.

Магнитная энергия индуктивно-связанных контуров.

Пусть есть два неподвижных магнитных контура, которые не изменяют своих размеров и находятся в неферромагнитной среде. Индуктивность первого контура L_1 , второго - L_2 , взаимная индуктивность - M .

Суммарная магнитная энергия двух магнитосвязанных контуров:

$$W_M = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} \pm M i_1 i_2.$$

Знак «+» при согласном включении контуров, а «-» при встречном включении.

Представим это выражение в более общем виде:

$$W_M = \frac{L_1 i_1^2}{2} \pm \frac{M i_1 i_2}{2} \pm \frac{L_2 i_2^2}{2} \pm \frac{M i_1 i_2}{2} = \frac{(L_1 i_1 \pm M i_2) i_1}{2} + \frac{(L_2 i_2 \pm M i_1) i_2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 i_k \Psi_k.$$

Аналогичное выражение будет иметь место, если магнитосвязаны n контуров:

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k \Psi_k,$$

где Ψ_k - полное потокосцепление k -го контура.

Энергия магнитного поля системы магнитосвязанных контуров с токами равна полусумме произведений токов контуров и их полных потокосцеплений.

Баланс мощностей в магнитосвязанных цепях.

Пусть l -тая ветвь цепи магнитосвязана с m -той ветвью, причем сопротивление взаимной индукции равняется:

$$Z_{M_{lm}} = \omega M_{lm}.$$

Условие баланса мощностей можно записать в виде:

$$\sum_k \dot{E}_k \dot{I}_k = \sum_k \dot{Z}_k I_k^2 + j2I_l I_m Z_{M_{lm}} \cos(\varphi_l - \varphi_m),$$

где $\dot{Z}_k = R_k + jx_k$; φ_l, φ_m - начальные фазы токов. Сопротивление $Z_{M_{lm}}$ будет положительным при согласованном включении и отрицательным при встречном.

Если в контуре есть больше двух магнитосвязанных ветвей (катушек), то будем иметь суммы попарных произведений токов магнитосвязанных ветвей, сопротивлений взаимной индукции и косинусов сдвига начальных фаз токов. Так для трех ветвей:

$$j2[I_1 I_2 Z_{M_{12}} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + I_1 I_3 Z_{M_{13}} \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + I_2 I_3 Z_{M_{23}} \cos(\varphi_2 - \varphi_3)].$$

Одноименные зажимы индуктивно связанных катушек.

Положительное направление тока и создаваемого им магнитного потока согласовано по правилу правоходового винта (правой руки). На рис.49 изображены индуктивно связанные катушки, в которых в зависимости от направления намотки витков выбраны такие положительные направления для токов i_1 и i_2 , при которых магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке совпадают (согласное включение).

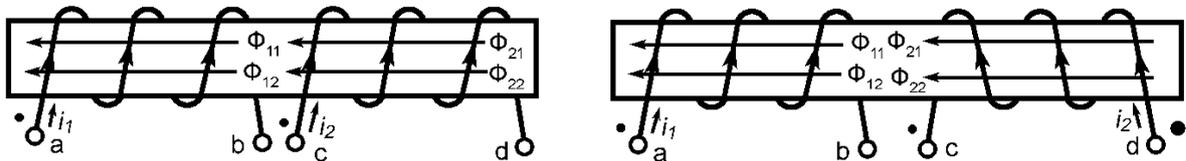


Рис.49

Одноименными (однополярными) называют такие выводы индуктивно связанных катушек, относительно которых токи i_1 и i_2 имеют одинаковые направления при согласном включении катушек. Одноименные выводы обозначают на схеме специальными символами: «*», «•», «Δ» и др. (рис.50).

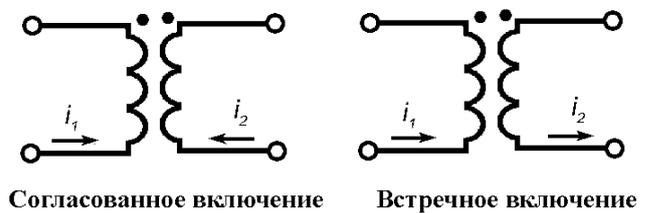


Рис.50

Положительное направление ЭДС взаимной индукции e_{M1} , индуцируемой в первой катушке током i_2 второй катушки, принимают совпадающим с положительным направлением тока i_1 в первой катушке. Соответственно положительное направление ЭДС e_{M2} , наводимой во второй катушке током i_1 первой катушки, совпадает с положительным направлением тока i_2 во второй

катушке. Тогда для согласного включения катушек:

$$e_{M1} = -M \frac{di_2}{dt}; \quad e_{M2} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Поскольку $u_{M1} = -e_{M1}$, $u_{M2} = -e_{M2}$, то положительные направления напряжений взаимной индукции также будут совпадать с положительными направлениями токов (рис.51).

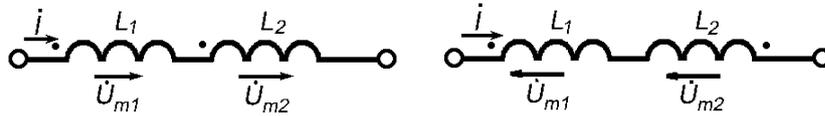


Рис.51

Таким образом, в общем случае:

$$\dot{U}_M = \pm j\omega M \dot{I} = \pm jx_M \dot{I} = \pm \dot{Z}_M \dot{I}.$$

«+» - для согласного включения катушек;

«-» - для встречного включения катушек.

Расчет сложных электрических цепей при наличии индуктивной связи.

При наличии индуктивной связи нельзя использовать метод узловых потенциалов, эквивалентные преобразования. Метод эквивалентного генератора можно применять, если нет индуктивной связи в ветви, для которой нужно найти ток. Все другие методы можно использовать с учетом особенностей индуктивной связи.

Рассмотрим примеры.

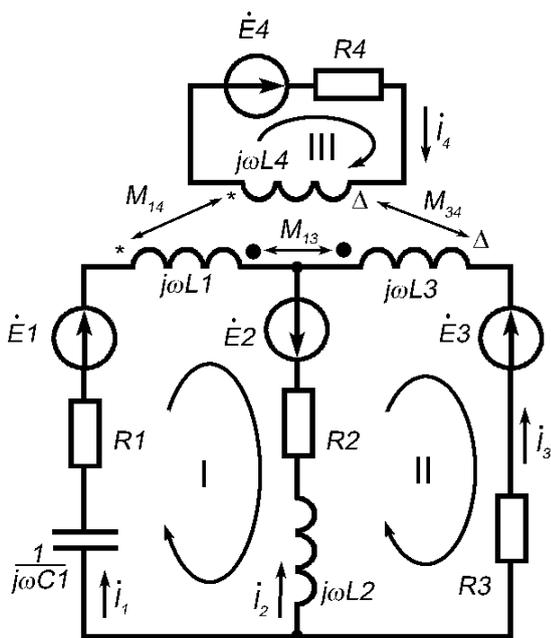


Рис.52

Рассчитать токи в цепи рис.52.

Для этой схемы по законам Кирхгофа нужно составить 4 уравнения (одно по 1-му и три по 2-му):

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0 \\ \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = (R_1 + j\omega L_1 - j/\omega C_1) \dot{I}_1 - R_2 \dot{I}_2 - j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M_{13} \dot{I}_3 - j\omega M_{14} \dot{I}_4; \\ -\dot{E}_2 + \dot{E}_3 = (R_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2 - (R_3 + j\omega L_3) \dot{I}_3 - j\omega M_{34} \dot{I}_4 - j\omega M_{13} \dot{I}_1; \\ \dot{E}_4 = (R_4 + j\omega L_4) \dot{I}_4 - j\omega M_{14} \dot{I}_1 + j\omega M_{34} \dot{I}_3. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, мы найдем токи ветвей. После этого составляем баланс мощностей: $P_{ИСТ} = P_H$; $Q_{ИСТ} = Q_H$.

$$\begin{aligned}
& E_1 I_1 \sin(E_1 \wedge I_1) - E_2 I_2 \sin(E_2 \wedge I_2) + E_3 I_3 \sin(E_3 \wedge I_3) + E_4 I_4 \sin(E_4 \wedge I_4) = \\
& = \omega L_1 I_1^2 - \frac{1}{\omega C} I_1^2 + \omega L_2 I_2^2 + \omega L_3 I_3^2 + \omega L_4 I_4^2 - 2\omega M_{14} I_1 I_4 \cos(I_1 \wedge I_4) + \\
& + 2\omega M_{13} I_1 I_3 \cos(I_1 \wedge I_3) + 2\omega M_{34} I_3 I_4 \cos(I_3 \wedge I_4).
\end{aligned}$$

Применим для расчета *метод контурных токов* (направления контурных токов $\dot{J}_{k1}, \dot{J}_{k2}, \dot{J}_{k3}$ выбираем по часовой стрелке).

Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{Z}_{11} \dot{J}_{k1} + \dot{Z}_{12} \dot{J}_{k2} + \dot{Z}_{13} \dot{J}_{k3} = \dot{E}_{11}; \\ \dot{Z}_{21} \dot{J}_{k1} + \dot{Z}_{22} \dot{J}_{k2} + \dot{Z}_{23} \dot{J}_{k3} = \dot{E}_{22}; \\ \dot{Z}_{31} \dot{J}_{k1} + \dot{Z}_{32} \dot{J}_{k2} + \dot{Z}_{33} \dot{J}_{k3} = \dot{E}_{33}. \end{cases}$$

$$\dot{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_1}; \quad \dot{Z}_{22} = j\omega L_2 + R_2 + j\omega L_3 + R_3; \quad \dot{Z}_{33} = j\omega L_4 + R_4;$$

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} = -j\omega L_2 - R_2 - i\omega M_{13}; \quad \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_{32} = -j\omega M_{34}; \quad \dot{Z}_{13} = \dot{Z}_{31} = -j\omega M_{14};$$

$$\dot{E}_{11} = \dot{E}_1 + \dot{E}_2; \quad \dot{E}_{22} = -\dot{E}_2 - \dot{E}_3; \quad \dot{E}_{33} = \dot{E}_4.$$

Включение катушек рассматривается относительно контурных токов!

Решив систему уравнений, находим контурные токи $\dot{J}_{k1}, \dot{J}_{k2}, \dot{J}_{k3}$ и затем определяем токи ветвей: $\dot{I}_1 = \dot{J}_{k1}; \dot{I}_2 = \dot{J}_{k2} - \dot{J}_{k1}; \dot{I}_3 = -\dot{J}_{k2}; \dot{I}_4 = \dot{J}_{k3}$.

Развязка индуктивных связей.

Анализ и расчет электрических цепей упрощается, если часть схемы, которая содержит индуктивные связи, заменить эквивалентной схемой без индуктивных связей. Суть метода состоит в том, что начальную схему с магнитосвязанными элементами путем введения дополнительных индуктивностей и изменения тех что были, преобразуют таким образом, что магнитная связь между всеми элементами в преобразованной схеме отсутствует, а токи и напряжения ветвей не изменяются.

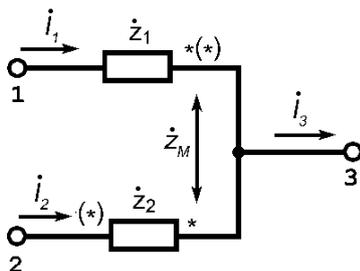


Рис.53

Рассмотрим участок цепи, который содержит два индуктивносвязанных элемента, соединенных в общем узле (рис53). Возможны два варианта:

- 1) элементы соединены одноименными зажимами *.
- 2) элементы соединены разноименными зажимами (*).

Для напряжений ветвей можно записать:

$$\dot{U}_{13} = \dot{Z}_1 \dot{I}_1 \pm \dot{Z}_M \dot{I}_2; \quad \dot{U}_{23} = \dot{Z}_2 \dot{I}_2 \pm \dot{Z}_M \dot{I}_1;$$

верхние знаки соответствуют 1-му случаю, а нижние 2-му.

С учетом того, что $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0$, исключим из первого уравнения ток, \dot{I}_2 а

из второго \dot{I}_1 : $\dot{U}_{13} = (\dot{Z}_1 \mp \dot{Z}_M) \dot{I}_1 \pm \dot{Z}_M \dot{I}_3$; $\dot{U}_{23} = (\dot{Z}_2 \mp \dot{Z}_M) \dot{I}_2 \pm \dot{Z}_M \dot{I}_3$.

Тогда для напряжения \dot{U}_{12} можно записать:

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_{13} - \dot{U}_{23} = (\dot{Z}_1 \mp \dot{Z}_M) \dot{I}_1 - (\dot{Z}_2 \mp \dot{Z}_M) \dot{I}_2.$$

Этим уравнениям соответствует схема, приведенная на рис.54.

Выбор знака зависит только от схемы включения индуктивно связанных элементов и не зависит от направления токов.

Если индуктивно связанные элементы соединены треугольником или трёхлучевой звездой, то последовательно применяя рассмотренный способ эквивалентной замены, можно перейти к схемам без индуктивных связей (рис.55, рис. 56).

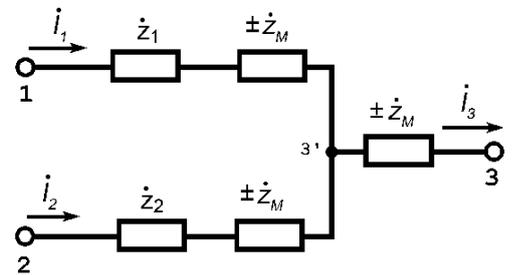


Рис.54

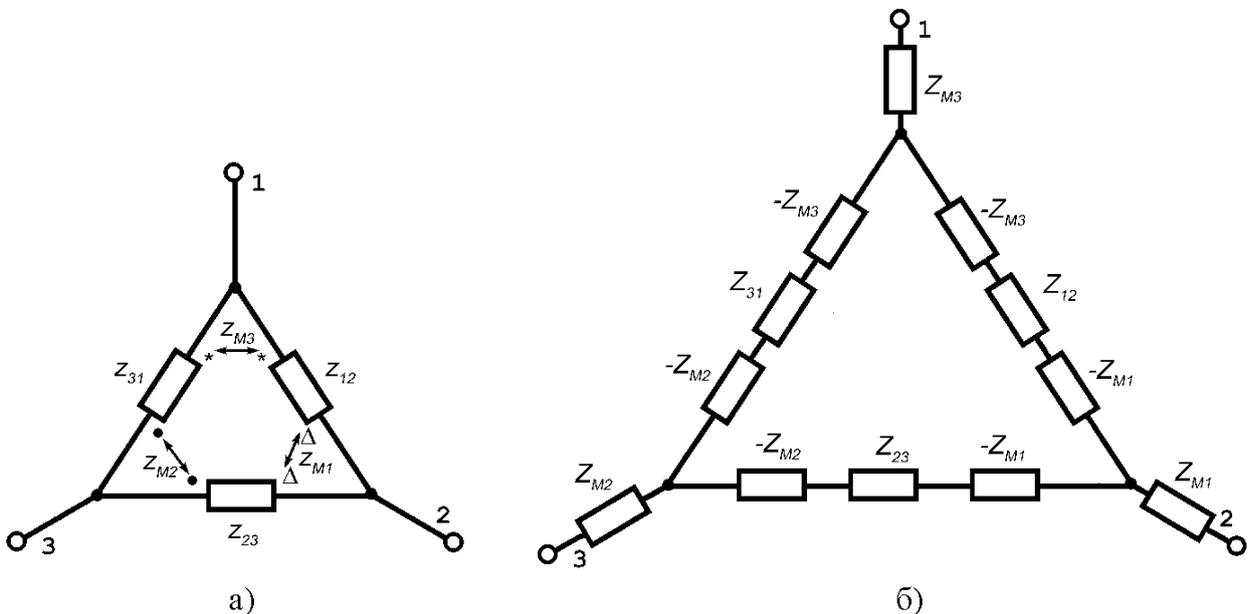


Рис.55

Любые две индуктивно связанные ветви, которые не имеют общего узла, также можно заменить эквивалентной схемой без индуктивной связи. Но эта схема будет довольно сложной и использовать ее обычно нецелесообразно.

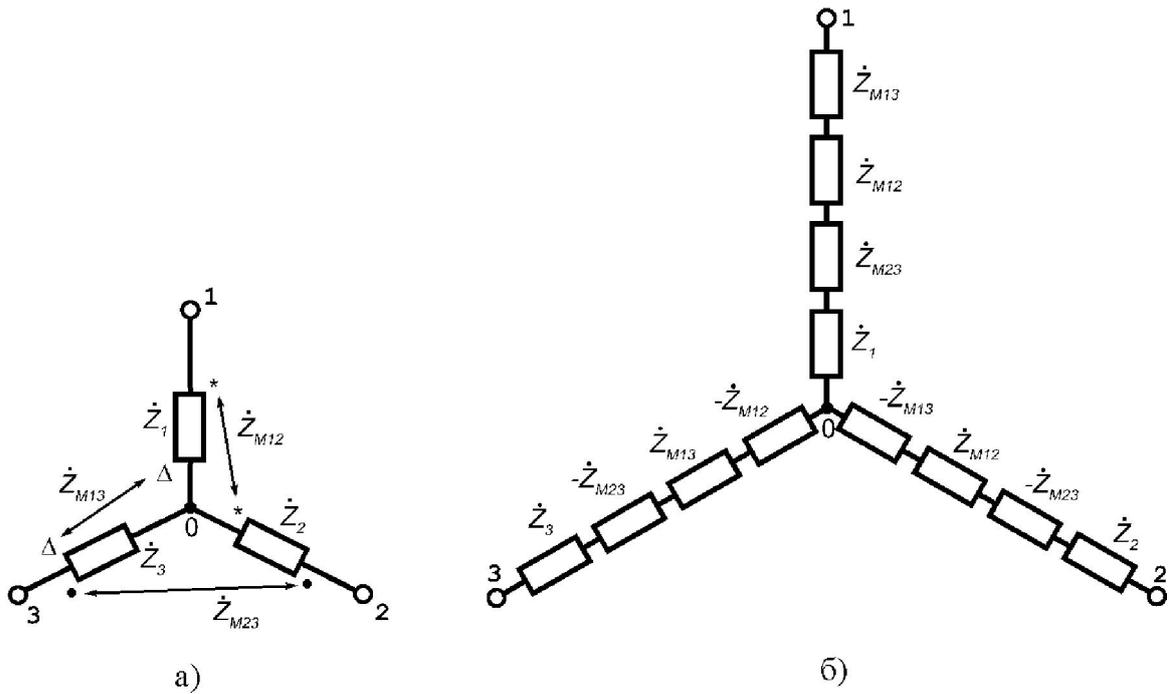


Рис.56

Индуктивность рассеяния. Коэффициент индуктивной связи.

Пусть первая катушка содержит w_1 , а вторая w_2 витков, расположенных в каждой катушке настолько близко друг к другу, что магнитный поток охватывает полностью все витки катушки (рис.57).

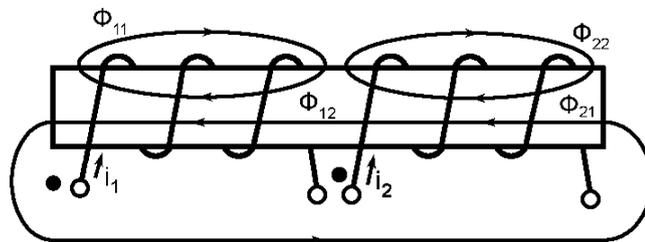


Рис.57

В общем случае, когда по обеим катушкам проходят токи i_1 и i_2 , магнитные потоки могут быть представлены как результат наложения потоков, образованных каждым током в отдельности:

$$\begin{aligned} i_1 \neq 0, i_2 = 0, \Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{12}; \\ i_1 = 0, i_2 \neq 0, \Phi_2 &= \Phi_{22} + \Phi_{21}. \end{aligned}$$

Потоки Φ_{11} , Φ_{22} называют **потоками рассеяния** и обозначают Φ_{S1} , Φ_{S2} . Чем меньше потоки рассеяния Φ_{S1} и Φ_{S2} , тем ближе потоки Φ_{12} и Φ_{21} к полным потокам, соответственно Φ_1 и Φ_2 .

Потокосцепления самоиндукции определяются по формулам:

$$\psi_1 = w_1 \Phi_1 = w_1 \Phi_{S1} + w_1 \Phi_{12}; \quad \psi_2 = w_2 \Phi_2 = w_2 \Phi_{S2} + w_2 \Phi_{21}.$$

Индуктивность каждой катушки определяется отношением потокосцепления самоиндукции к току данной катушки:

$$L_1 = \frac{w_1 \Phi_1}{i_1} = \frac{w_1 \Phi_{S1}}{i_1} + \frac{w_1 \Phi_{12}}{i_1}; \quad \frac{w_1 \Phi_{S1}}{i_1} = L_{S1}; \quad L_2 = \frac{w_2 \Phi_2}{i_2} = \frac{w_2 \Phi_{S2}}{i_2} + \frac{w_2 \Phi_{21}}{i_2}; \quad \frac{w_2 \Phi_{S2}}{i_2} = L_{S2}.$$

Первые слагаемые в этих выражениях называют **индуктивностями рассеяния** катушек, т.е. это отношение потокосцепления рассеяния катушек к току, который создал эти потоки.

Взаимная индуктивность катушек:
$$M = \frac{w_2 \Phi_{12}}{i_1} = \frac{w_1 \Phi_{21}}{i_2}.$$

Тогда
$$\frac{w_1}{w_2} M = \frac{w_1 \Phi_{12}}{i_1}; \quad \frac{w_2}{w_1} M = \frac{w_2 \Phi_{21}}{i_2},$$
 а следовательно,

$$L_1 = L_{S1} + \frac{w_1}{w_2} M; \quad L_2 = L_{S2} + \frac{w_2}{w_1} M.$$

Степень индуктивной связи двух катушек характеризуется **коэффициентом связи K**, который определяется средним геометрическим отношений потока взаимной индукции ко всему потоку катушки, то есть:

$$K = \sqrt{\frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} \cdot \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2}} = \sqrt{\frac{M i_1}{w_2} \cdot \frac{w_1}{L_1 i_1} \cdot \frac{M i_2}{w_1} \cdot \frac{w_2}{L_2 i_2}} = \sqrt{\frac{M}{L_1 L_2}}; \quad L_1 L_2 \geq M^2, \quad K \leq 1.$$

Очевидно, что при уменьшении потоков рассеяния связь между катушками усиливается. Если потоки рассеяния отсутствуют, то $K = 1$; $L_1 L_2 = M^2$.

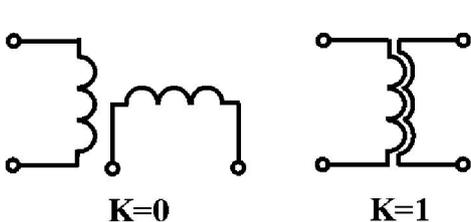


Рис.58

Повышение коэффициента связи достигается бифилярным способом намотки катушек и применением магнитопровода (сердечника). При перпендикулярном расположении осей катушек $K = 0$ (рис.58). Если перемещать одну катушку относительно другой, можно плавно изменять коэффициент связи K , а при последовательном соединении катушек - их суммарную индуктивность. Такое устройство называется вариометр.

Последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек.

Рассмотрим две последовательно соединенные катушки (рис.59).

Пусть: $\dot{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$; $\dot{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$;

$\dot{Z}_M = j\omega M$ - комплексное сопротивление взаимной индукции.

По второму закону Кирхгофа можно записать:

$$\dot{U} = R_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} \pm j\omega M \dot{I} + R_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} \pm j\omega M \dot{I}$$

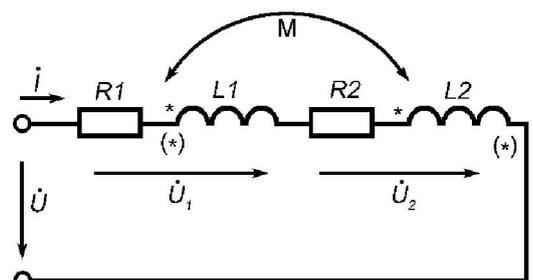


Рис.59

или
$$\dot{U} = \dot{Z}_1 \dot{I} + \dot{Z}_2 \dot{I} \pm 2 \dot{Z}_M \dot{I} = (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_M) \dot{I}.$$

«+» - для согласного включения катушек * ;
 «-» - для встречного включения катушек (*).

Эквивалентное сопротивление цепи:

$$\dot{Z}_\varnothing = \dot{U} / \dot{I} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_M; R_\varnothing = R_1 + R_2; x_\varnothing = x_1 + x_2 \pm 2x_M \Rightarrow L_\varnothing = L_1 + L_2 \pm 2M;$$

$$\left. \begin{aligned} L_{\varnothing_{\text{согл}}} &= L_1 + L_2 + 2M \\ L_{\varnothing_{\text{встр}}} &= L_1 + L_2 - 2M \end{aligned} \right\} \Rightarrow M = \frac{L_{\varnothing_{\text{согл}}} - L_{\varnothing_{\text{встр}}}}{4}$$

По этой формуле можно определить взаимную индуктивность M опытным путем.

Для согласного режима векторная диаграмма приведена на рис.60. При построении диаграммы считалось, что $M > L_1, M < L_2$. Возможны случаи:

- $L_1 > M; L_2 > M;$
- $L_1 > M; L_2 < M;$

$L_1 < M; L_2 < M$ - не может быть никогда!

Для встречного включения катушек диаграмма будет иметь вид (рис.61). Угол $\varphi_{E1} < 0$, т.е. имеет место ложный емкостной эффект. Такое может быть только при наличии магнитной связи. Но даже для такого случая характер всей цепи будет индуктивным $\varphi_E > 0$.

Это можно доказать таким образом:

$$(\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2 = L_1 + L_2 - 2\sqrt{L_1 L_2} \Rightarrow M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \Rightarrow L_1 + L_2 - 2M > 0, \text{ а следовательно } L_E > 0 (\varphi_E > 0).$$

Параллельное включение двух индуктивно связанных катушек.

Рассмотрим цепь рис.62. Можно записать такую систему уравнений:

$$\begin{cases} R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U} \\ R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1 = \dot{U} \end{cases}$$

«+» - для согласованного включения;
 «-» - для встречного включения.

Обозначим

$$\dot{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1; \dot{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2; \dot{Z}_M = j\omega M.$$

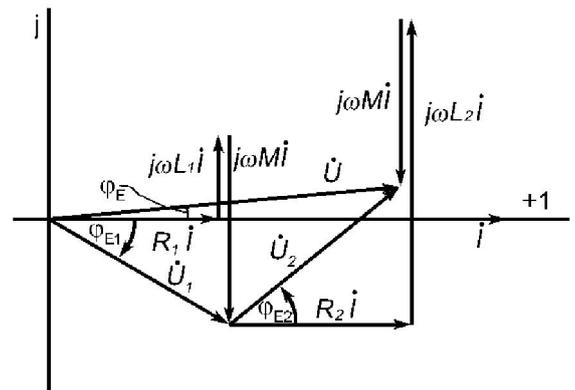
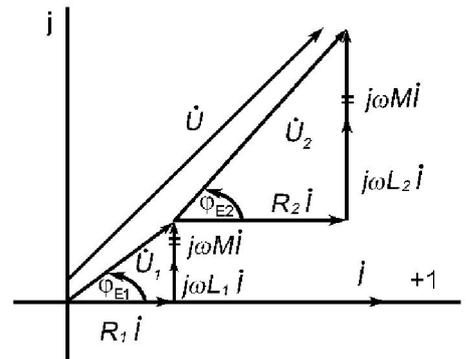


Рис.61

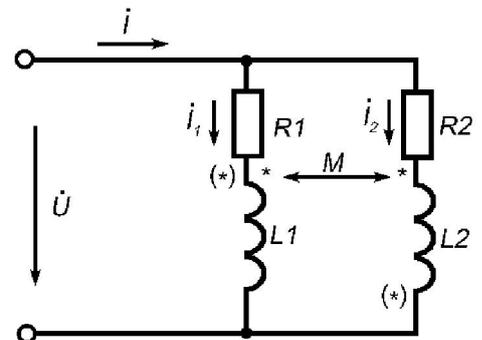


Рис.62

Тогда будем иметь:

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 \dot{I}_1 \pm \dot{Z}_M \dot{I}_2 = \dot{U} \\ \pm \dot{Z}_M \dot{I}_1 + \dot{Z}_2 \dot{I}_2 = \dot{U} \end{cases} \left\| \begin{array}{l} \Delta = \dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2; \\ \Delta_1 = (\dot{Z}_2 \mp \dot{Z}_M) \dot{U}; \quad \dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\dot{Z}_2 \mp \dot{Z}_M}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2} \dot{U}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{Z}_1 \mp \dot{Z}_M}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2} \dot{U}; \\ \Delta_2 = (\dot{Z}_1 \mp \dot{Z}_M) \dot{U}; \end{array} \right.$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 \mp 2\dot{Z}_M}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2} \dot{U}; \quad \dot{Z}_E = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 \mp 2\dot{Z}_M}.$$

Рассмотрим векторные диаграммы для согласного включения катушек (рис.63). Активная составляющая напряжения первой катушки:

$$U_{a1} = U \cos \varphi_{E1} > I_1 R_1.$$

Умножим на ток I_1 :

$$P_1 = U_{a1} I_1 = U I_1 \cos \varphi_{E1} > I_1^2 R_1.$$

Активная мощность, которая поступает от источника в первую катушку больше, чем мощность, превращающаяся в теплоту. Разность $(P_1 - I_1^2 R_1)$ равна активной мощности, которая обусловлена взаимоиндукцией:

$$P_{M1} = P_1 - I_1^2 R_1 > 0.$$

Положительные направления напряжения и тока выбраны совпадающими, а следовательно $P_{M1} > 0$ соответствует потреблению энергии магнитным полем индуктивно связанных катушек. Таким образом мощность P_{M1} характеризует энергию, которая поступает в магнитное поле.

Для второй катушки $U_{a2} = U \cos \varphi_{E2} < I_2 R_2$; $P_2 = U_{a2} I_2 < I_2^2 R_2$.

Активная мощность, которая поступает от источника во вторую катушку будет меньше, чем энергия которая превращается в ней в теплоту. При этом

$$P_{M2} = P_2 - I_2^2 R_2 < 0.$$

Поскольку $P_{M2} < 0$, то это значит, что эта мощность отдается магнитным полем первой катушки во вторую катушку и тем самым покрывает недостачу энергии. При этом выполняется условие

$$P_{M1} + P_{M2} = 0 \quad \text{или} \quad P_{M1} = -P_{M2}.$$

Тогда будем иметь:

$$P_{\text{ИСТ}} = P_1 + P_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2.$$

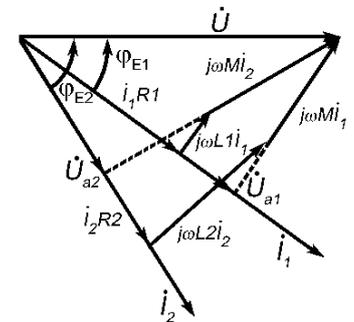


Рис.63

Для согласованного включения катушек возможен случай, когда сдвиг фаз превышает $\pi/2$ ($\varphi_{E2} > \pi/2$) (рис.64).

$$U_{a1} > I_1 R_1 \Rightarrow P_1 = U_{a1} I_1 > I_1^2 R_1;$$

$$P_1 > 0; P_{M1} > 0.$$

Сдвиг фаз \dot{U} и \dot{I} больше $\pi/2$, а поэтому

$$P_{M2} = P_2 - I_2^2 R_2 < 0 \quad (U_{a2} < 0);$$

$$P_{M2} = P_2 - I_2^2 R_2 < 0 \quad (P_2 < 0; I_2^2 R_2 > 0).$$

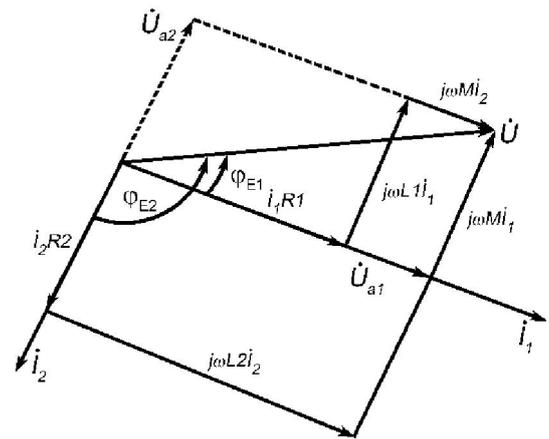


Рис.64

Активная мощность поступает от источника в первую катушку. Часть ее рассеивается на активном сопротивлении $I_1^2 R_1$ (превращается в тепло), а остаток (P_{M1}) поступает в магнитное поле, откуда потом она передается второй катушке. Во второй катушке часть мощности превращается в теплоту ($I_2^2 R_2$), а остаток ($P_2 < 0$) возвращается в источник.

Векторная диаграмма для встречного включения катушек показана на рис.65.

$$P_1 = U_{a1} I_1 > I_1^2 R_1; \quad P_{M1} < 0;$$

$$P_2 = U_{a2} I_2 > I_2^2 R_2; \quad P_{M2} > 0.$$

Активная мощность передается от источника через вторую катушку в магнитное поле, а из магнитного поля в первую катушку.

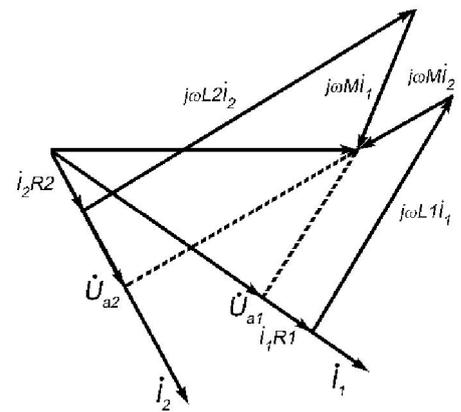


Рис.65

Передача энергии между индуктивно связанными элементами цепи.

Рассмотрим, каким образом передается энергия между двумя индуктивно связанными элементами разветвленной цепи. Всю цепь, за исключением этих двух элементов, изобразим в виде активного четырехполюсника А (рис.66).

Пусть известные токи:

$$\dot{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1} \quad \text{и} \quad \dot{I}_2 = I_2 e^{j\psi_2}.$$

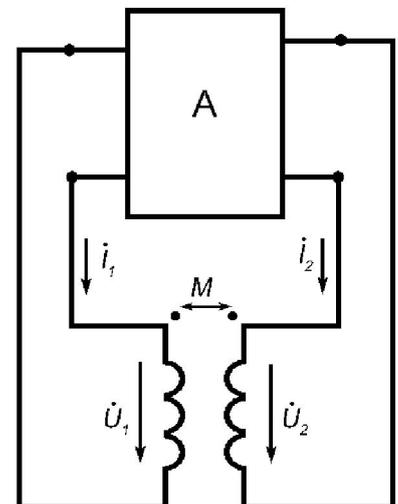


Рис.66

Комплексные мощности, обусловленные взаимной индукцией:

$$\begin{aligned}\dot{S}_{M1} &= \dot{U}_{M1} I_1^* = j\omega \dot{I}_2 I_1^* = j\omega I_1 I_2 e^{j(\psi_2 - \psi_1)} = -\omega MI_1 I_2 \sin(\psi_2 - \psi_1) + \\ &+ j\omega MI_1 I_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) = \omega MI_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) + j\omega MI_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2); \\ \dot{S}_{M2} &= \dot{U}_{M2} I_2^* = j\omega \dot{I}_1 I_2^* = j\omega I_1 I_2 e^{j(\psi_1 - \psi_2)} = -\omega MI_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) + \\ &+ j\omega MI_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) = -\dot{S}_{M1}^*.\end{aligned}$$

Тогда:

$$P_{M1} = -P_{M2} = \omega MI_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2); \quad Q_{M1} = Q_{M2} = \omega MI_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2).$$

При указанных на схеме положительных направлениях токов и напряжений положительные значения мощностей соответствуют поступлению энергии в рассмотренные элементы от активного четырехполюсника, а отрицательные значения мощностей - передаче энергии от рассматриваемых элементов в четырехполюсник. Суммарная мощность, которая поступает в оба элемента, обусловленная взаимной индукцией, равна нулю:

$$P_{M1} + P_{M2} = 0$$

Суммарная реактивная мощность, обусловленная взаимной индукцией, в общем случае не равна нулю и может быть величиной как положительной, так и отрицательной.

Если $0 < \varphi_1 - \varphi_2 < \pi$, $P_{M1} > 0$, $P_{M2} < 0$ - энергия передается от четырехполюсника в магнитное поле через первый элемент и возвращается через второй элемент.

Если $-\pi < \varphi_1 - \varphi_2 < 0$, $P_{M1} < 0$, $P_{M2} > 0$ - передача энергии происходит наоборот.

Если $(\psi_1 - \psi_2) = 0$ или $(\psi_1 - \psi_2) = \pi$, то $P_{M1} = P_{M2} = 0$.

Уравнения и схемы замещения воздушного (линейного, без магнитопровода) трансформатора.

Трансформатор - это устройство, которое передает энергию из одной цепи в другую за счет электромагнитной индукции. Трансформаторы применяют для изменения величины токов и напряжений, гальванической развязки цепей, измерения токов большой величины (трансформаторы тока), согласования нагрузки и источника, изменения числа фаз и др.

Трансформатор состоит из двух или более индуктивно связанных обмоток. Рассмотрим самый простой двухобмоточный трансформатор без ферромагнитного сердечника. Если пренебречь распределенными емкостями, которые существуют между витками каждой обмотки, а также между обмотками, то схема замещения трансформатора будет иметь вид, показанный на рис.67. Активные сопротивления обмоток условно вынесены (R_1 , R_2). Обмотка, присоединенная к источнику питания

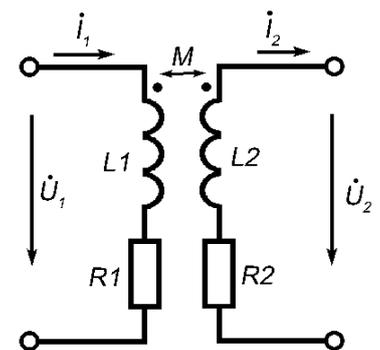


Рис.67

называется *первичной*, а обмотка, к которой подключена нагрузка - *вторичной*. Соответственно токи и напряжения этих обмоток называют первичными и вторичными. В ряде случаев такие названия весьма условны, потому что энергия может передаваться как в одну, так и в другую сторону. Изображенная схема может быть описана такими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \\ -\dot{U}_2 = (R_1 + j\omega L_2) \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{U}_1 = [R_1 + j\omega(L_1 - M) + j\omega M] \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \\ -\dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + [R_2 + j\omega(L_2 - M) + j\omega M] \dot{I}_2. \end{cases}$$

Последней системе уравнений соответствует схема, которая также может быть использована в качестве схемы замещения линейного трансформатора. В этой схеме первичная и вторичная обмотки трансформатора связаны не индуктивно, а гальванически (рис.68).

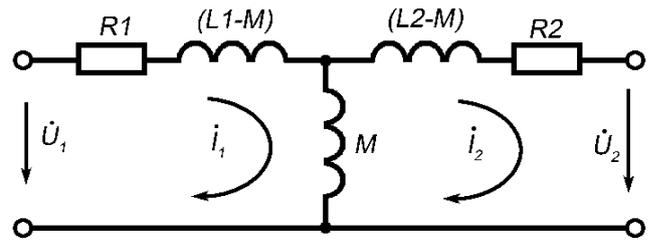


Рис.68

Так как $K = M/\sqrt{L_1 L_2} < 1$, то при $L_1 = L_2$, $w_1 = w_2$ будем иметь $(L_1 - M) > 0$, $(L_2 - M) > 0$ и такую схему можно физически реализовать. При одинаковом количестве витков величины $(L_1 - M)$ и $(L_2 - M)$ имеют четкий физический смысл - это индуктивности рассеяния L_{S1} , L_{S2} первичной и вторичной обмоток трансформатора.

Если коэффициент трансформации $n = w_1/w_2 \neq 1$ ($w_1 \neq w_2$), то $L_1 \neq L_2$, а $(L_1 - M)$ или $(L_2 - M)$ будет меньше нуля. При этом схему замещения трансформатора практически можно реализовать только на фиксированной частоте, когда отрицательная индуктивность может быть заменена соответствующей емкостью. Для произвольной частоты практическая реализация схемы замещения с отрицательной индуктивностью невозможна.

Для того, чтобы получить схему, реализуемую во всем частотном диапазоне, используют приведенную схему замещения трансформатора, для которой коэффициент трансформации $n = 1$.

Пусть есть реальный трансформатор с количеством витков первичной и вторичной обмоток соответственно w_1 и w_2 . Изменим количество витков следующим образом: $w_1 = w_2'$ или $w_1' = w_2$. Обычно количество витков вторичной обмотки приводят к первичной ($w_1 = w_2'$).

Для вторичной обмотки должно выполняться условие равенства магнитодвижущих сил:

$$\dot{I}_2 w_2 = \dot{I}'_2 w_2' \rightarrow \dot{I}'_2 = \frac{w_2}{w_2'} \dot{I}_2 = \frac{\dot{I}_2}{n}.$$

Кроме того, необходимо обеспечить неизменность мощности:

$$\dot{U}_2 \dot{I}_2 = \dot{U}'_2 \dot{I}'_2 \rightarrow \dot{U}'_2 = n \dot{U}_2.$$

Таким образом, приведение к первичной обмотке заключается в том, что ток вторичной обмотки делится на n , а напряжение на вторичной обмотке умножается на n . При этом сопротивление вторичной обмотки нужно умножить на n^2 .

Уравнения трансформатора принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = [R_1 + j\omega(L_1 - nM)]\dot{I}_1 + j\omega nM \dot{I}_1 - j\omega nM \dot{I}_2 / n ; \\ -n\dot{U}_2 = -j\omega nM \dot{I}_1 + n^2[R_2 + j\omega(L_2 - M/n)]\dot{I}_2 / n + j\omega nM \dot{I}_2 / n ; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_{S1})\dot{I}_1 + j\omega nM \dot{I}_1 - j\omega nM \dot{I}'_2 ; \\ -\dot{U}'_2 = -j\omega nM \dot{I}_1 + n^2(R_2 + j\omega L_{S2})\dot{I}'_2 + j\omega nM \dot{I}'_2 . \end{cases}$$

Этим уравнениям соответствует приведенная схема замещения, изображенная на рис.69. Поперечная ветвь nM называется ветвью намагничивания; ток $(\dot{I}_1 - \dot{I}'_2)$ - ток намагничивания.

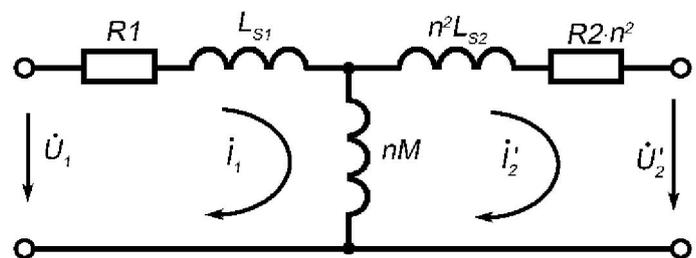


Рис.69

Построим векторную диаграмму для приведенной схемы трансформатора.

Построение диаграммы начинаем со вторичной обмотки. Вектор тока \dot{I}'_2 направляем по действительной оси $+1$ (рис.70).

Напряжение \dot{U}'_2 опережает ток (индуктивный характер цепи). Сумма напряжений $\dot{U}'_2 + [R'_2 + j\omega L_{S2}]\dot{I}'_2$ дает напряжение на поперечной ветви. Ток намагничивания $(\dot{I}_1 - \dot{I}'_2)$ отстает от этого напряжения на угол $\pi/2$.

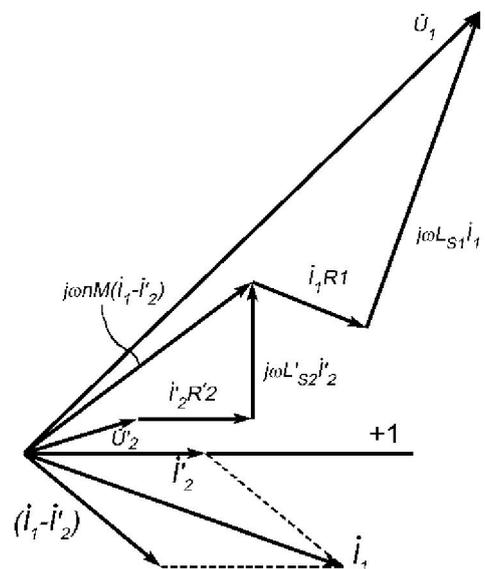


Рис.70

Так как в приведенной схеме ток \dot{I}'_2 и напряжение \dot{U}'_2 (приведенные к первичной обмотке) отличаются от \dot{I}_2 и \dot{U}_2 , то эта схема неэквивалентна исходной схеме замещения трансформатора. Для того, чтобы приведенная схема была эквивалентна исходной схеме на выходе нужно включить идеальный трансформатор.

Идеальный трансформатор

Идеальный трансформатор - это идеализированный элемент цепи, для которого при любых условиях отношения первичного напряжения ко вторичному равно отношению вторичного тока к первичному и определяется коэффициентом трансформации:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = n \Rightarrow \dot{U}_1 = n\dot{U}_2; \dot{I}_1 = \frac{\dot{I}_2}{n} \quad \parallel \quad \begin{matrix} \dot{Z}_{BX1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{\dot{I}_2/n} = n^2 \dot{Z}_H. \end{matrix}$$

В идеальном трансформаторе нет потерь энергии, а при разомкнутой вторичной обмотке ток через первичную обмотку не проходит. Очевидно, что в природе такого трансформатора не существует, но по своим свойствам к нему приближается трансформатор с коэффициентом связи близким к единице, и таким большим количеством витков, что сопротивление ветви намагничивания практически равно бесконечности, а активные сопротивления обмоток малы $R_1 = R_2 = 0$.

Если дополнить приведенную схему трансформатора идеальным трансформатором с коэффициентом трансформации n , то получим эквивалентную схему трансформатора (рис.71).

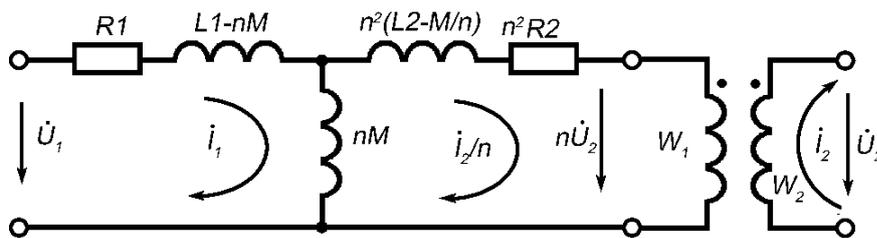


Рис.71

Идеальный трансформатор изменяет только модуль сопротивления. Это свойство используют для согласования нагрузки с источником энергии: $n = \sqrt{Z_1/Z_H}$, где Z_1 необходимо сопротивление.

Входное сопротивление трансформатора.

Понятие о вносимом сопротивлении.

Если нагрузка \dot{Z}_H подключена к источнику через трансформатор (рис.72), то будут верны такие уравнения:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2; \\ 0 = \pm j\omega M \dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_H)\dot{I}_2. \end{cases}$$

Из второго уравнения определяем ток \dot{I}_2 :

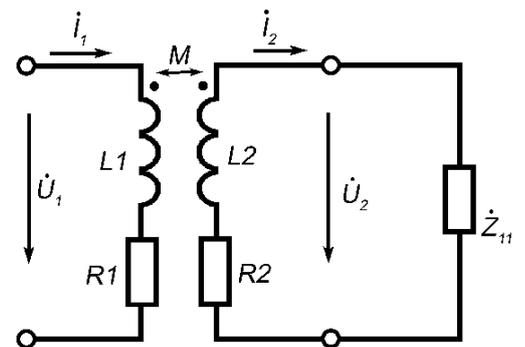


Рис.72

$$\dot{I}_2 = \frac{\pm j\omega M \dot{I}_1}{R_2 + j\omega L_2 + \dot{Z}_H}$$

Тогда для входного сопротивления трансформатора будем иметь:

$$\dot{Z}_{BX1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{R_2 + j\omega L_2 + \dot{Z}_H}$$

Одноконтурная схема замещения трансформатора изображена на рис.73. Сопротивление $\frac{(\omega M)^2}{R_2 + j\omega L_2 + \dot{Z}_H}$ называют вносимым сопротивлением. Это сопротивление, которое нужно внести из вторичной цепи в первичную, чтобы учесть влияние вторичной цепи на ток в первичной цепи. В зависимости от характера нагрузки мнимая часть вносимого сопротивления может быть положительной или отрицательной.

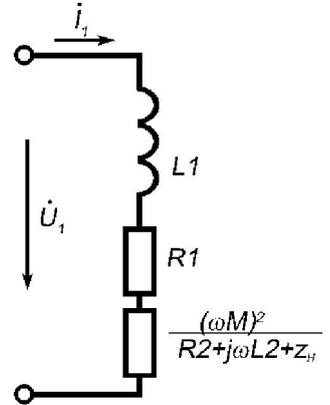


Рис.73

Резонансные режимы в электрических цепях.

Резонанс - это такой режим в пассивной электрической цепи, содержащей индуктивности и емкости, при котором реактивное сопротивление или реактивная проводимость цепи равны нулю. По отношению к внешней цепи двухполюсник ведет себя как чисто активное сопротивление. При этом напряжение и ток на выводах двухполюсника совпадают по фазе, а реактивная мощность на зажимах двухполюсника равна нулю.

Резонанс напряжений наблюдается в электрической цепи с последовательным соединением индуктивностей и емкостей (последовательный колебательный контур).

Резонанс токов наблюдается в цепи с параллельным соединением индуктивных и емкостных элементов (параллельный колебательный контур).

Частоты, на которых наблюдается явление резонанса называют *резонансными частотами*.

Последовательный колебательный контур. Резонанс напряжений.

Рассмотрим последовательный колебательный контур (рис.74). Комплексное сопротивление такой цепи зависит от частоты:

$$\dot{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + jx.$$

Условием резонанса является $x = 0$, то есть:

$$\omega L = 1/\omega C.$$

Тогда для резонансной частоты будем иметь:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

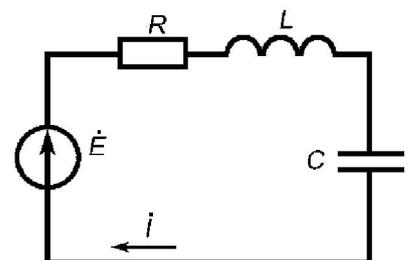


Рис.74

При резонансе ток в цепи достигает максимального значения: $I_0 = E/R$.

На частоте резонанса ω_0 сопротивления реактивных элементов:

$$x_{L0} = \omega_0 L = x_{C0} = 1/\omega_0 C = \sqrt{L/C} = \rho,$$

где ρ - волновое (характеристическое) сопротивление контура.

Напряжения на индуктивности и емкости будут одинаковой величины:

$$U_{L0} = U_{C0} = I_0 \omega_0 L = \frac{I_0}{\omega_0 C} = I_0 \rho = E \frac{\omega_0 L}{R} = E \cdot \frac{1}{\omega_0 C R}.$$

Отношение $\frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\rho}{R} = Q$ называется добротностью контура

(коэффициент резонанса). Добротность показывает во сколько раз напряжение на реактивных элементах контура (индуктивности, емкости) превышает напряжение на входе контура в резонансном режиме. Обычно добротность составляет (50÷500). Величина обратная к добротности называется затуханием

(коэффициент затухания): $d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho} = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$.

Мгновенные энергии индуктивности и емкости: $w_L = \frac{Li^2(t)}{2}$; $w_C = \frac{Cu_C^2(t)}{2}$.

Пусть $i(t) = I_m \sin \omega_0 t$ (на частоте резонанса). Тогда $u_c(t) = -U_{Cm} \cos \omega_0 t$.

Подставив $i(t)$ и $u_c(t)$ получим:

$$w_L(t) = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t; \quad w_C(t) = \frac{CU_{Cm}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t; \quad \frac{CU_{Cm}^2}{2} = \frac{C(I_m 1/\omega_0 C)^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}.$$

Суммарное значение энергии будет неизменным:

$$w_L(t) + w_C(t) = \frac{LI_m^2}{2} (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{LI_m^2}{2}.$$

Происходит непрерывное перераспределение энергии электрического и магнитного полей, а обмена энергией между источником и реактивными элементами цепи нет. Вся электрическая энергия, которая поступает от источника питания рассеивается на активном сопротивлении R .

Пусть входное напряжение E , а также параметры контура R, L, C постоянны. Рассмотрим, как изменяются z, I, U_L, U_C в зависимости от частоты.

Полное сопротивление контура: $z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$.

Ток в цепи:

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \xi^2}},$$

где $\xi = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$ - обобщенная расстройка контура, которая характеризует

расстройку контура относительно резонансной частоты.

При изменении частоты ω изменяется реактивное сопротивление цепи $x = \omega L - \frac{1}{\omega C}$. На низких частотах $\omega \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, причем $x < 0$, т.е. цепь имеет емкостной характер. Полное сопротивление цепи $z \rightarrow \infty$, а ток $I \rightarrow 0$.

С повышением частоты ω реактивное сопротивление контура x уменьшается ($\omega L \uparrow, \frac{1}{\omega C} \downarrow$), $z \downarrow, I \uparrow$.

На резонансной частоте $\omega = \omega_0$, $x = 0$, $z = R$ и ток достигает своего наибольшего значения $I_0 = E/R$.

При дальнейшем росте частоты ω реактивное сопротивление контура x растет ($\omega L \uparrow, \frac{1}{\omega C} \downarrow$), $z \downarrow, I \uparrow$. Цепь имеет индуктивный характер $x > 0$.

При $\omega \rightarrow \infty$, $z \rightarrow \infty$, $I \rightarrow 0$.

Напряжение на индуктивности:

$$U_L = \omega LI = E \frac{Q\omega/\omega_0}{\sqrt{1+Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}} = \frac{EQ\omega/\omega_0}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

При $\omega \rightarrow 0$, $U_L \rightarrow 0$; при $\omega = \omega_0$ $U_L = QE$; при $\omega \rightarrow \infty$, $U_L \rightarrow E$.

Напряжение на емкости:

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I = \frac{EQ\omega_0/\omega}{\sqrt{1+Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}} = \frac{EQ\omega_0/\omega}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

Графики обычно строят для относительных величин (рис.75).

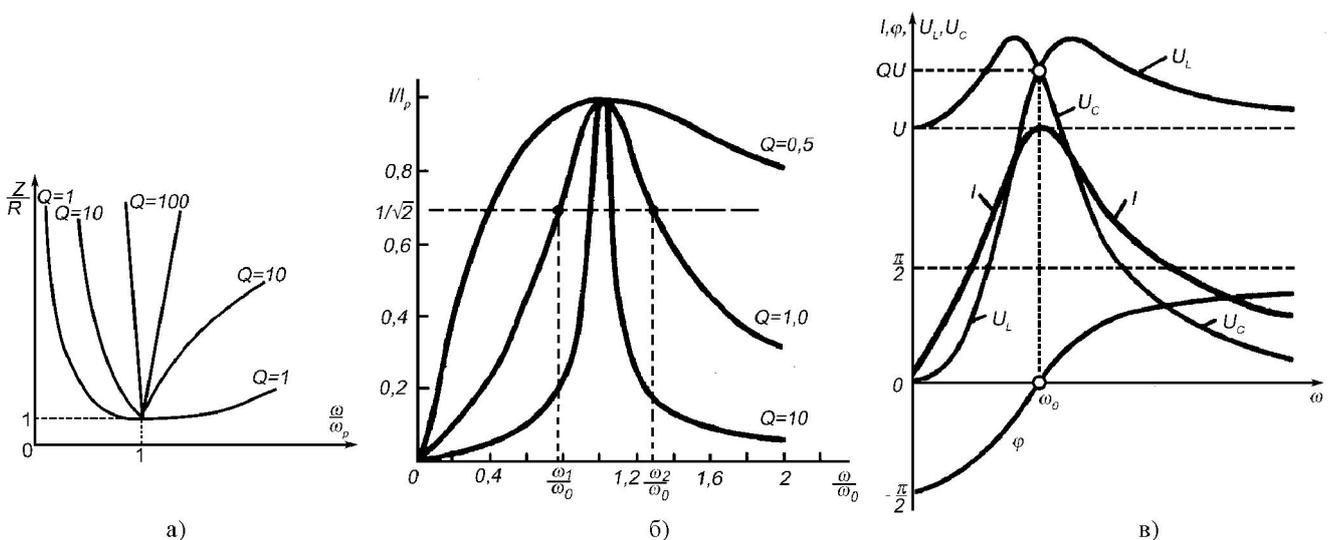


Рис.75

Полосу частот вблизи резонанса, на границах которой ток спадает до $1/\sqrt{2} = 0,707$ от максимального (резонансного) значения, называют полосой пропускания резонансного контура.

При токе $I = I_0 / \sqrt{2}$ мощность, потребляемая сопротивлением R , равняется:

$$R(I_0 / \sqrt{2})^2 = RI_0^2 / 2,$$

т.е. составляет половину мощности, которая потребляется при резонансе. Таким образом границы полосы пропускания соответствуют половине максимальной мощности.

На границах полосы пропускания резонансного контура модуль реактивного сопротивления равен активному сопротивлению. Можно показать, что:

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_1}{\omega_0} \right) = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = d ; \quad \omega_1 \omega_2 = \omega_0^2 ; \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} .$$

Таким образом, чем больше добротность тем меньшей будет полоса пропускания.

Внутреннее сопротивление источника ЭДС $R_{вн}$ прибавляется к активному сопротивлению контура R и влияет на добротность и полосу пропускания колебательного контура: чем больше $R_{вн}$ тем меньше добротность и шире полоса пропускания контура. Поэтому для повышения избирательности контура (уменьшения полосы пропускания) последовательного колебательного контура целесообразно использовать источник питания с малым внутренним сопротивлением $R_{вн}$.

Если добротность $1 < Q < 5$, напряжения на индуктивности U_L и емкости U_C достигают величины большей чем $Q \cdot E$. Максимум U_L расположен выше, а U_C ниже резонансной частоты:

$$\frac{\omega_L}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/2Q^2}} ; \quad \frac{U_{L\max}}{E} = \frac{Q}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}} ; \quad \frac{\omega_C}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega_L} ; \quad U_{C\max} = U_{L\max} .$$

Напряжение на индуктивности $U_L = \omega LI$ равно нулю при $\omega = 0$; с повышением частоты ω напряжение может расти только до тех пор, пока ток не начнет спадать быстрее, чем растет частота ω . После этого U_L спадает, приближаясь в пределе к напряжению источника E .

Напряжение на емкости U_C равно напряжению источника E при $\omega = 0$. С ростом частоты ω напряжение U_C растет пока ток увеличивается быстрее чем частота ω . Достигнув максимума, напряжение U_C начинает спадать, приближаясь в пределе к нулю. Кривые U_L и U_C пересекаются при резонансе ($\omega = \omega_0$) при этом их значение равняется $Q \cdot E$.

Если добротность контура высокая $Q > 5$, то:

$$U_{C\max} = U_{L\max} = QE ; \quad \omega_L = \omega_C .$$

При низкой добротности контура $Q < 1/\sqrt{2} = 0,707$:

$$\begin{aligned} \omega_L &\rightarrow \infty ; & U_{L\max} &\rightarrow E ; \\ \omega_C &\rightarrow 0 ; & U_{C\max} &\rightarrow E . \end{aligned}$$

Объединенная векторная диаграмма токов и напряжений при резонансе имеет вид, показанный на рис.76.

$$\dot{U}_{LO} = \frac{\dot{E}}{R} j\omega_0 L = i_0 jx\omega L_0 = j\dot{E}Q;$$

$$\dot{U}_{CO} = \frac{\dot{E}}{Rj\omega C_0} = \frac{i_0}{j\omega_0 C_0} = -j\dot{E}Q;$$

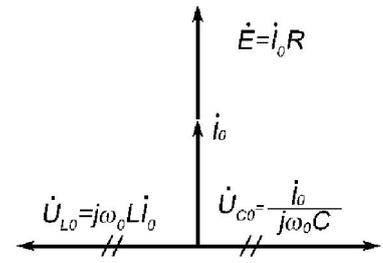


Рис.76

Параллельный колебательный контур. Резонанс токов.

Рассмотрим цепь с двумя параллельными ветвями, одна из которых содержит сопротивление и индуктивность, а вторая - сопротивление и емкость (рис.77). Такую цепь называют параллельным колебательным контуром.

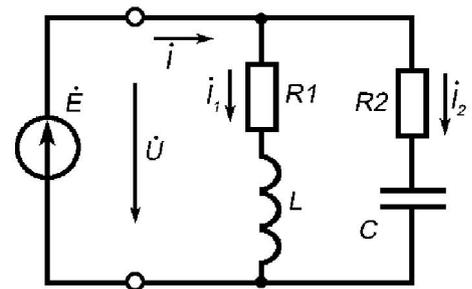


Рис.77

Проводимость цепи:

$$\dot{Y} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 + 1/j\omega C} =$$

$$= \left(\frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + 1/\omega^2 C^2} \right) - j \left(\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1/\omega C}{R_2^2 + 1/\omega^2 C^2} \right) = g - jb = ye^{-j\varphi}$$

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{b}{g} .$$

Резонанс в такой цепи наступает, когда входная реактивная проводимость равна нулю: $b = b_1 + b_2 = 0 \rightarrow b_1 = -b_2$. Если $b_1 = -b_2$, то реактивные токи ветвей равны по величине, но противоположны по фазе. Такой режим называется резонанс токов.

$$\dot{I}_1 = I_1 e^{j\varphi_1}; \quad \dot{I}_2 = I_2 e^{j\varphi_2}; \quad \varphi_1 = \arctg \frac{\omega L}{R_1}; \quad \varphi_2 = -\arctg \frac{1}{\omega C R_2} .$$

Как видно из векторной диаграммы (рис.78), входной ток \dot{I} может быть меньше токов ветвей \dot{I}_1, \dot{I}_2 .

Если активные сопротивления отсутствуют (контур без потерь), токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 имеют сдвиги фаз относительно напряжения соответственно $+\pi/2$ и $-\pi/2$, а входной ток контура $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0$. В этом идеальном случае входное сопротивление цепи бесконечно.

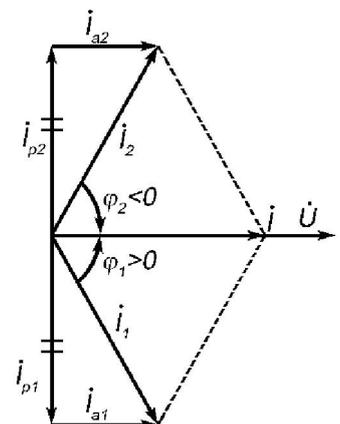


Рис.78

Условие резонанса:

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1/\omega C}{R_2^2 + 1/\omega^2 C^2}.$$

Изменением одной из величин ω , L , C , R_1 , R_2 при неизменных остальных параметрах цепи можно достичь выполнения этого условия. Если значение изменяемой величины при ее определении из приведенного соотношения будет комплексным, то резонанс отсутствует. Для ω , R_1 , R_2 может быть только по одному значению, при которых выполняется условие резонанса, а для L и C могут быть два различных действительных значения. В таких случаях изменением L или C можно достичь двух различных резонансных режимов.

Если уравнение резонанса решить относительно ω , то будем иметь:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}.$$

Для того, чтобы ω_0 имело действительное значение (существовал резонансный режим) необходимо выполнение неравенств:

$$R_1 > \rho, R_2 > \rho \quad \text{или} \quad R_1 < \rho, R_2 < \rho.$$

В противном случае ω_0 будет мнимой величиной, т.е. резонанс невозможен.

Если $R_1 = R_2 \neq \rho$, то $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, т.е. имеет такое же значение, как в последовательном контуре.

Если $R_1 = R_2 = \rho$, то контур резонирует на любой частоте ("безразличный" резонанс). Действительно в этом случае эквивалентное сопротивление цепи будет равняться:

$$z_e = \frac{(\rho + j\omega L)(\rho - j/\omega C)}{\rho + j\omega L + \rho - j/\omega C} = \frac{\rho^2 + j\rho(\omega L - 1/\omega C) + \rho^2}{2\rho + j(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{\rho[2\rho + j(\omega L - 1/\omega C)]}{2\rho + j(\omega L - 1/\omega C)} = \rho.$$

Таким образом, эквивалентное сопротивление будет иметь чисто активный характер и не будет зависеть от частоты. Следовательно ток совпадает по фазе с напряжением на любой частоте, а его значение будет неизменным $I_0 = U/\rho$.

В радиоэлектронных устройствах используют контуры с малыми потерями, т.е. $R_1 \ll \rho$, $R_2 \ll \rho$. При таких условиях:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Во многих случаях сопротивлением R_2 емкостной ветви пренебрегают, т.е. $R_2 = 0$, $R_1 \neq 0$.

Тогда:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_1}{L}\right)^2}; \quad g = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2}; \quad b = b_1 + b_2 = \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \omega C.$$

Графики зависимости g, b, Y от частоты имеют вид, наведенный на рис.79.

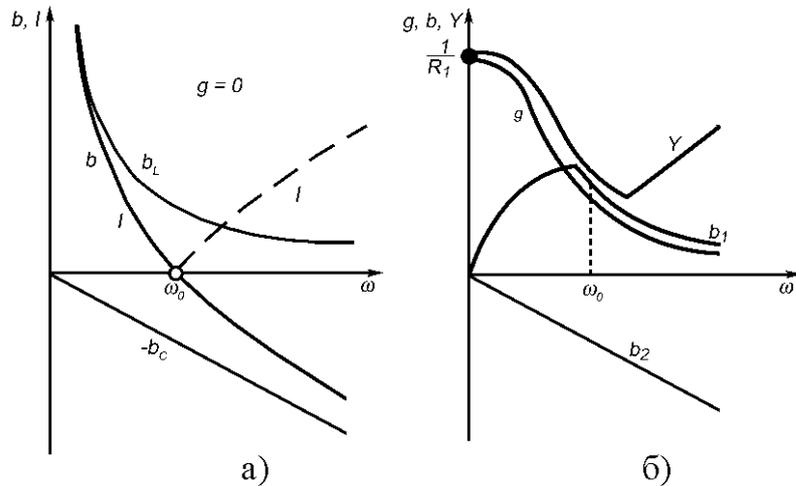


Рис.79

Минимум полной проводимости Y контура, а следовательно и тока достигается не на резонансной частоте ω_0 , а на несколько более высокой.

Резонансные явления при изменении параметров контура

Резонанса можно достичь не только изменением частоты напряжения питания, но и изменением индуктивности или емкости контура. Допустим, что в последовательном контуре может изменяться емкость (рис.80). Ток контура равен:

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

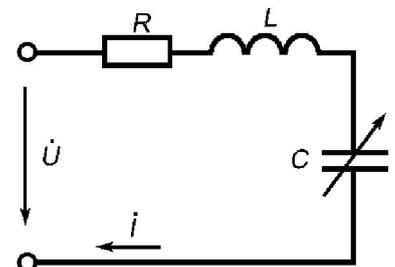


Рис.80

Если $C=0$, то $1/\omega C \rightarrow \infty$, а $I=0$. С увеличением емкости C ее реактивное сопротивление $1/\omega C$ уменьшается, а ток I растет (рис.81). Когда $C=C_0$, ток достигает своего наибольшего значения $I_0=U/R$. При дальнейшем увеличении емкости реактивное сопротивление контура $(\omega L - 1/\omega C)$ также увеличивается. При этом возрастает и полное сопротивление z , а ток I спадает. Если $C \rightarrow \infty$, то I_∞

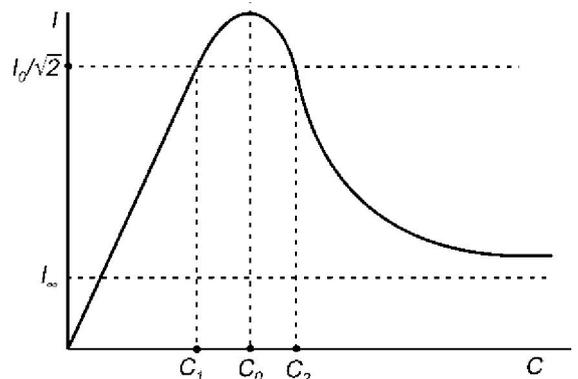


Рис.81

достигает значения: $I_\infty = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$.

Добротность контура: $Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega C_0 R}$.

Напряжение на индуктивности $U_L = \omega L \cdot I$. Так как $\omega L = const$, то U_L будет повторять форму тока (рис.82). Максимальное значение напряжения на индуктивности будет равно:

$$U_{L\max} = \omega L \cdot I_0 = Q \cdot U.$$

Если $C \rightarrow \infty$, то $U_{L\infty} = \frac{\omega L U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} < U$.

Напряжение на емкости:

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I.$$

Если $C = 0$, то $U_C = U$. С увеличением емкости напряжение U_C также возрастает и достигает своего максимального значения при $C < C_0$ (при добротности контура $Q > 1$).

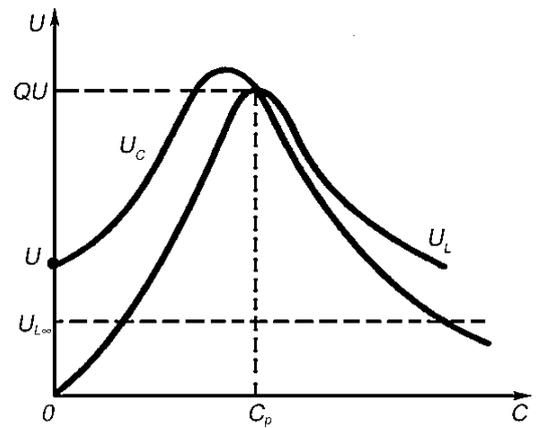


Рис.82

При $C = C_0$: $U_{C\max} = \frac{U}{\omega C_0 R} = QU = U_{L\max}$.

С дальнейшим ростом C ($C \rightarrow \infty$) U_C спадает до 0.

Если $Q > 10$, то можно считать, что максимальное напряжение на емкости равно максимальному напряжению на индуктивности (погрешность меньше 1%):

$$U_{C\max} = QU = U_{L\max}.$$

Измерив значения емкостей C_1 и C_2 , при которых ток в $\sqrt{2}$ раз меньше резонансного значения, можно определить параметры цепи R, L, Q из уравнения:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U/R}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \left(Q - \frac{1}{\omega CR}\right)^2}}.$$

Если $C = C_1$, или $C = C_2$ подкоренное выражение равняется $\sqrt{2}$, то есть:

$$\left(Q - \frac{1}{\omega C_{1,2} R}\right)^2 = 1.$$

Отсюда получаем выражения:

$$Q - \frac{1}{\omega \cdot C_1 R} = -1; \quad Q - \frac{1}{\omega \cdot C_2 R} = 1 \quad (*)$$

Если отнять от первого выражения второе, то получим:

$$\frac{1}{\omega \cdot R} (1/C_1 - 1/C_2) = 2 \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{2\omega} (1/C_1 - 1/C_2). \quad (**)$$

Если сложить первое и второе соотношения (*) будем иметь:

$$2Q = \frac{1}{\omega} (1/C_1 + 1/C_2).$$

Подставляем в это выражение (**):

$$Q = \frac{1/C_1 + 1/C_2}{1/C_1 - 1/C_2}.$$

Тогда индуктивность контура будет равна:

$$L = \frac{QR}{\omega} = \frac{1}{2\omega^2} (1/C_1 + 1/C_2).$$

Резонанс в индуктивно связанных контурах

Для повышения крутизны резонансных характеристик (улучшения избирательных свойств) используют двухконтурные резонансные цепи: два резонансных контура, каждый из которых настроен на одну и ту же частоту. Контуров могут быть связаны электрически (емкостная связь) или индуктивно (трансформаторная связь). Рассмотрим резонансные явления для случая двух одинаковых последовательных контуров, которые имеют трансформаторную связь (рис.83).

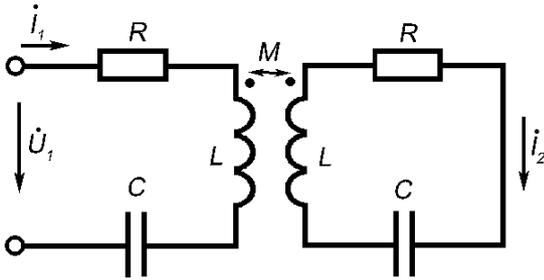


Рис.83

Уравнения можно записать в виде:

$$\begin{cases} (R + jx) \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_1 \\ (R + jx) \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

где $x = \omega L - 1/\omega C$.

На частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ каждый контур

настраивается в резонанс, т.е. $x = 0$. Из системы уравнений (*) находим:

$$\dot{I}_{10} = \frac{R}{R^2 + \omega_0^2 M^2} \dot{U}_1; \quad \dot{I}_{20} = \frac{j\omega_0 M \dot{I}_{10}}{R} = \frac{j\omega_0 M}{R^2 + \omega_0^2 M^2} \dot{U}_1.$$

Таким образом входные ток и напряжение совпадают по фазе (цепь настроена в резонанс).

На всех других частотах $\omega_0 \neq \omega$:

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{U}_1}{(R + jx)^2 + \omega^2 M^2}.$$

Тогда:

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_{20}} = \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{R^2 + \omega_0^2 M^2}{(R + jx)^2 + \omega^2 M^2} = \omega^* \frac{1 + \omega_0^2 M^2 / R^2}{\left(1 + j \frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{\omega M}{R}\right)^2} = \omega^* \frac{1 + (kQ)^2}{(1 + j\xi)^2 + (kQ)^2}, \quad (**)$$

где $\omega^* = \frac{\omega}{\omega_0}$ - относительная частота; $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}$ - добротность каждого из контуров; $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{M}{L}$ - коэффициент связи; $\xi = Q(\omega^* - \frac{1}{\omega^*})$ - обобщенная расстройка.

Действительно:
$$\frac{\omega_0 M}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} \cdot \frac{M}{L} = kQ;$$

$$\frac{x}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{\omega^* \omega_0 L - 1/\omega^* \omega_0 C}{R} = Q \left(\omega^* - \frac{1}{\omega^*} \right) = \xi.$$

Кроме того в выражении (***) принято допущение, что для контура с достаточно большой добротностью $\omega^* = 1$ (поэтому $\omega_0 L = \omega L$). Это верно при достаточно малых расстройках (так для $\xi = 3$ и $Q = 20$, $\omega \approx 1,08\omega_0$).

При условии $\omega \approx \omega_0$ резонансная кривая может быть описана выражением:

$$\frac{I_2}{I_{20}} = \frac{1 + (kQ)^2}{\sqrt{[1 - \xi^2 + (kQ)^2]^2 + 4\xi^2}}.$$

Для слабой связи $kQ \ll 1$. Тогда:

$$\frac{I_2}{I_{20}} = \frac{1}{\sqrt{[1 - \xi^2]^2 + 4\xi^2}} = \frac{1}{1 + \xi^2}.$$

Резонансная кривая имеет один максимум при условии $\xi = 0$ т.е. $\omega = \omega_0$.

На границах полосы пропускания $I_2/I_{20} = 1/\sqrt{2}$. Тогда получаем:

$$1 + \xi^2 = \sqrt{2}; \quad \xi^2 = \sqrt{2} - 1.$$

На границах полосы пропускания $\xi = \pm 0,64$, а для последовательного контура $\xi = \pm 1$. Таким образом, при условии слабой связи, полоса пропускания связанных контуров будет меньше, чем для последовательного контура (лучшая избирательность).

При условии критической связи ($kQ = 1$):

$$\frac{I_2}{I_{20}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^4/4}},$$

а на границах полосы пропускания

$$\xi = \pm \sqrt{2} \left(\frac{\xi^4}{4} = 1 \right).$$

Т.е. в этом случае полоса пропускания связанных контуров будет большей, чем в последовательном контуре.

При условии сильной связи $kQ > 1$ резонансная кривая имеет два максимума (рис.84). Полоса пропускания в 3,1 раза больше, чем у последовательного контура, а характеристика ближе к прямоугольной. Это может быть достаточно существенным преимуществом при построении широкополосных систем.

Значение резонансного тока I_{20} зависит от коэффициента связи контуров и достигает максимума

при условии $\omega_0 M = R$:
$$I_{20\max} = \frac{U_1}{2R}.$$

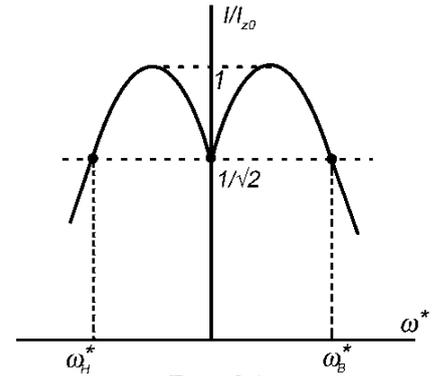


Рис.84

Рассмотренный режим имеет название «**полного резонанса**». При этом настраивают каждый контур и коэффициент связи.

Аналогично можно провести исследование «**частичных резонансов**».

Первый частичный резонанс получают изменением параметров первого контура (L_1 или C_1). При этом $I_1 = I_{1\max}$, $I_2 = I_{2\max}$, а ток \dot{I}_1 совпадает по фазе с напряжением \dot{U}_1 .

Второй частичный резонанс получают изменением параметров второго контура (L_2, C_2), достигая максимума тока $I_2 = I_{2\max}$.

«**Сложный резонанс**» имеет место при изменении параметров одного из контуров и коэффициента связи.

Частотные характеристики двухполюсников.

Понятие о резонансе в сложных цепях.

Входное сопротивление двухполюсника и его входная проводимость являются функциями частоты:

$$\begin{aligned} \dot{Z}(j\omega) &= R(\omega) + jx(\omega) = z(\omega)e^{j\varphi(\omega)}; \\ z(\omega) &= \sqrt{R^2(\omega) + x^2(\omega)}; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{x(\omega)}{R(\omega)}; \\ \dot{Y}(j\omega) &= g(\omega) - jb(\omega) = y(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}. \end{aligned}$$

Функции $z(\omega)$, $R(\omega)$, $x(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $y(\omega)$, $g(\omega)$, $b(\omega)$ называют **частотными характеристиками двухполюсников**. Частотные характеристики могут быть определены расчетным или опытным путём.

Если активное сопротивление цепи не равно нулю $R(\omega) \neq 0$, то условия резонанса $x(\omega) = 0$ и $b(\omega) = \frac{x(\omega)}{R(\omega)^2 + x(\omega)^2}$ эквивалентны.

В случае цепи без потерь $R(\omega) = 0$, а тогда $x(\omega) = 1/b(\omega)$ и условия резонанса неэквивалентны: $x(\omega) = 0$; $b(\omega) \rightarrow \infty$.

Резонансными будут все частоты, при которых $x(\omega)$ равно нулю или бесконечности, т.е. **нули** и **полюса** функции $x(\omega)$ (нули - корни числителя; полюса - корни знаменателя).

Нули соответствуют резонансу напряжений, а полюса - резонансу токов.

Рассмотрим частотные характеристики наиболее простых реактивных двухполюсников (рис.85.)

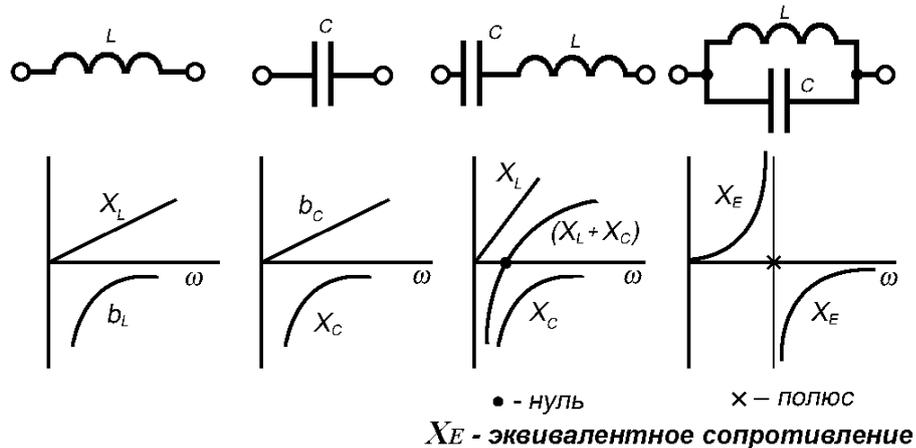


Рис.85

Общие свойства характеристик:

1. $\frac{dx(\omega)}{d\omega} > 0$, т.е. при увеличении частоты сопротивление растет;
2. Нули и полюса функции $x(\omega)$ чередуются (рядом двух нулей или двух полюсов быть не может).
3. Число резонансных частот на единицу меньше числа приведенных реактивных элементов цепи.
4. При $\omega \rightarrow 0$ $x(\omega) \rightarrow 0 \vee x(\omega) \rightarrow -\infty$;
при $\omega \rightarrow \infty$ $x(\omega) \rightarrow 0 \vee x(\omega) \rightarrow +\infty$.

Если в цепи есть путь для прохождения постоянного тока, то первым будет резонанс токов, если нет - то первым будет резонанс напряжений.

Если все ветви, которые сходятся в каком-нибудь узле имеют индуктивный или емкостной характер, то число резонансных частот уменьшается на единицу.

Примеры:

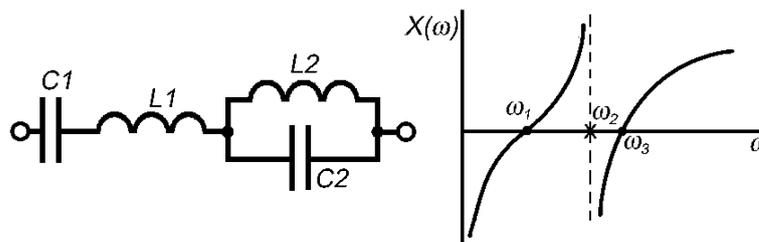


Рис.86

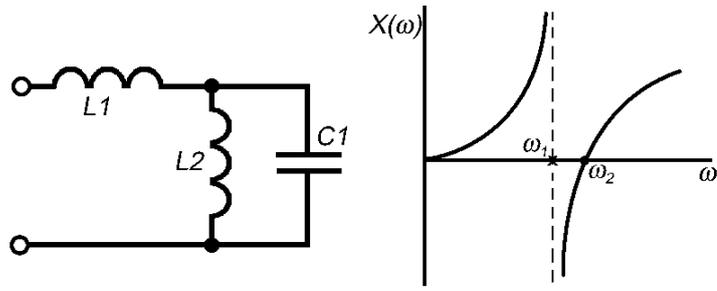


Рис.87

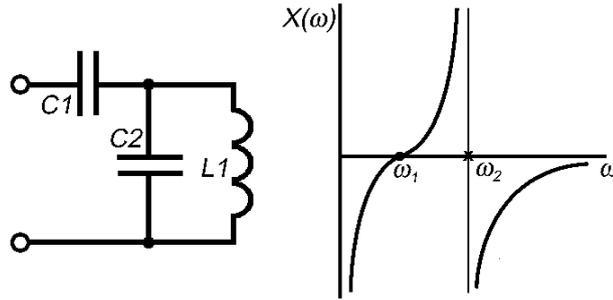


Рис.88

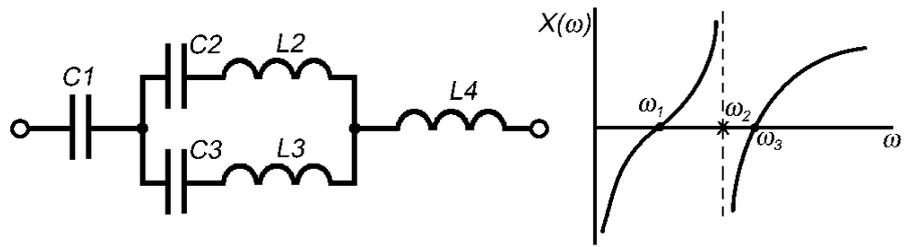


Рис.89

СПИСОК ОСНОВНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: Учебник для Вузов. 8- э изд. - Г.: Высшая школа, 1984. - 559 с.
 2. Основы теории цепей. Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. - Г.: Энергоатомиздат, 1989.-527с.
 3. Атабеков Т.И. Теоретические основы электротехники. Часть И, II - г.: Энергия, 1978. -592с.
 4. Попов В.П. Основы теории цепей. - Г.: Высшая школа, 1985. - 496 с.
 5. Сборник задач по теоретическим основам электротехники. Л.А. Бессонов, И.Т. Демидова, М.Е. Заруди и др.; Под ред. Л.А. Бессонова. - Г.: Высшая школа, 1980.-472с.
 6. Задачник по теоретическим основам электротехники. Теория цепей. Под ред. К.М. Поливанова. - Г.: Энергия. 1973.
 7. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники. Т.П. Андреев, С.Н. Андреев, Й.Й. Баранов и др.; Под. ред. П.А. Ионкина. - Г.: Энергоиздат, 1982. - 767 с.
 8. Под. ред. П.А.Ионкина. Теоретические основы электротехники, ч.2,3. Нелинейные электрические цепи. Г.- Высшая школа, 1976.
 9. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие для вузов. Под ред. П.А.Ионкина. -М.: Энергоиздат, 1982.- 768с.
- Дополнительная литература:
1. Нейман Л.Р., Демирчан К.С. Теоретические основы электротехники. Т.1,2 - Л.: Энергоиздат, 1981. - 536 с.
 2. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей: Линейные цепи. - Г.: Высшая школа, 1990. - 399 с.
 3. Шебес г. г., Каблукова М.В. Задачник по линейным электрическим цепям. - Г.: Высшая школа, 1990. - 543 с.
 4. Бирюков В.Н. и др. Сборник задач по теории цепей. - Г.: Высшая школа, 1985.-239с.
 5. В.Я. Ромашко. Основы анализа дискретно-линейных цепей. - К.: Либідь, 1993.-120с.

Содержание

| | |
|---|----|
| Электрические цепи однофазного синусоидального тока..... | 3 |
| Синусоидальный ток и основные величины которые его характеризуют..... | 3 |
| Среднее и действующее значения синусоидальных функций..... | 3 |
| Изображение синусоидальных функции времени векторами и комплексными числами..... | 5 |
| Сложение и вычитание синусоидальных функций на комплексной плоскости..... | 7 |
| Мгновенная мощность. Активные и реактивные сопротивления..... | 7 |
| Расчет цепей синусоидального тока..... | 8 |
| Синусоидальный ток в активном сопротивлении..... | 8 |
| Синусоидальный ток в индуктивности..... | 9 |
| Синусоидальный ток в емкости..... | 11 |
| Последовательное соединение R , L , C - элементов..... | 13 |
| Параллельное соединение R , L , C - элементов..... | 15 |
| Зависимость между эквивалентными сопротивлениями и проводимостями электрической цепи..... | 16 |
| Метод проводимостей..... | 17 |
| Мощность в цепи синусоидального тока..... | 17 |
| Комплексная форма записи мощностей..... | 19 |
| Компенсация реактивной мощности (сдвига фаз)..... | 20 |
| Условие передачи максимальной активной мощности от источника к приемнику..... | 21 |
| Измерение мощности ваттметром..... | 23 |
| Опытное определение эквивалентных параметров пассивных двухполюсников..... | 23 |
| Знаки мощностей и направление передачи энергии..... | 24 |
| Умножение вектора на « j » и на « $-j$ »..... | 25 |
| Комплексное изображение производной и интеграла от синусоидальных функций..... | 26 |
| Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме..... | 26 |
| Баланс мощностей..... | 27 |
| Расчет сложных электрических цепей синусоидального тока символическим (комплексным) методом..... | 28 |
| Метод контурных токов..... | 28 |
| Метод узловых потенциалов..... | 29 |
| Топографические диаграммы..... | 30 |
| Расчет цепей синусоидального тока методом векторных диаграмм..... | 31 |
| Метод эквивалентного генератора..... | 32 |
| Цепи синусоидального тока с индуктивной связью..... | 33 |
| Явление взаимной индукции, ЭДС взаимоиндукции. Взаимная индуктивность..... | 33 |
| Магнитная энергия индуктивно связанных контуров..... | 34 |
| Баланс мощностей в магнитосвязанных цепях..... | 35 |

| | |
|---|-----------|
| <i>Одноименные зажимы индуктивно связанных катушек.....</i> | 35 |
| <i>Расчет сложных электрических цепей при наличии индуктивной связи.....</i> | 36 |
| <i>Развязка индуктивных связей.....</i> | 37 |
| <i>Индуктивность рассеяния. Коэффициент индуктивной связи.....</i> | 39 |
| <i>Последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек.....</i> | 40 |
| <i>Параллельное соединение двух индуктивно связанных катушек.....</i> | 41 |
| <i>Передача энергии между индуктивно связанными элементами цепи.....</i> | 43 |
| <i>Уравнения и схемы замещения воздушного (линейного, без магнитопровода) трансформатора.....</i> | 44 |
| <i>Идеальный трансформатор.....</i> | 47 |
| <i>Входное сопротивление трансформатора. Понятие о вносимом сопротивлении.....</i> | 47 |
| <i>Резонансные режимы в электрических цепях.....</i> | 48 |
| <i>Последовательный колебательный контур. Резонанс напряжений.....</i> | 48 |
| <i>Параллельный колебательный контур. Резонанс токов.....</i> | 52 |
| <i>Резонансные явления при изменении параметров контура.....</i> | 54 |
| <i>Резонанс в индуктивно связанных контурах.....</i> | 56 |
| <i>Частотные характеристики двухполюсников. Понятие о резонансе в сложных цепях.....</i> | 58 |
| <i>Список основной литературы.....</i> | 61 |

