



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УКРАИНЫ

КИЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

**Кафедра промышленной электроники**

**КУРС ЛЕКЦИЙ**

**ПО ПРЕДМЕТУ: «Теория электрических цепей»**

**ЧАСТЬ 1. «Линейные цепи постоянного тока»**  
(для иностранных студентов специальности «Электронные системы»)

**Киев 2003 г.**



## УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА

дисциплины « Теория электрических цепей» (Часть 1)  
для подготовки бакалавров электроники (по специальности ЕС)

### I. ВВЕДЕНИЕ

Курс «Теория электрических цепей» - составная часть дисциплин, которые включены в перечень обязательных дисциплин бакалаврской подготовки по направлению электроника.

Цель курса: изучение основных законов, свойств, и методов расчета электрических цепей.

В процессе изучения курса студенты получают знания об основных элементах электрических цепей, их характеристики, изучают процессы в электрических цепях и методы их расчета.

Курс «Теория электрических цепей» состоит из трех частей:

1. Установившиеся процессы в линейных электрических цепях.
2. Установившиеся процессы в нелинейных электрических цепях.
3. Переходные процессы в электрических цепях.

Данный курс базируется на следующих основных дисциплинах:

1. Высшая математика.
2. Физика.
3. Персональные компьютеры и программирование.

Курс «Теория электрических цепей» является базовым для изучения последующих дисциплин схемотехнического направления, таких как:

1. анализ электронных схем;
2. аналоговая схемотехника;
3. энергетическая электроника;
4. моделирование в электронике;
5. электромагнитная техника и др.

### II. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

#### Раздел I. Основные законы, методы расчета и свойства электрических цепей постоянного тока

Общая характеристика задач, относящихся к теории электрических и магнитных цепей. Электрическая цепь и его элементы. Замещение физических устройств идеализированными элементами цепей. Источники ЭДС и тока. Законы Ома и Кирхгофа, их применения к расчету разветвленных схем. Баланс мощностей в электрических цепях. Метод контурных токов. Метод узловых потенциалов. Эквивалентные преобразования линейных электрических схем. Метод наложения (суперпозиции). Метод эквивалентного генератора. Входные и взаимные проводимости и сопротивления ветвей. Принцип взаимности (обратимости). Принцип компенсации. Линейные соотношения между напряжениями и токами в электрических цепях. Теория вариаций. Передача энергии от активного двухполюсника в нагрузку.

## Раздел II. Основные понятия о цепях синусоидального тока

Синусоидальный ток и основные характеризующие его величины. Изображение синусоидальных функций времени векторами и комплексными числами. Синусоидальный ток в активном сопротивлении, индуктивности и емкости, их последовательном и параллельном соединении. Мощность в цепи синусоидального тока. Комплексная форма записи мощности. Компенсация реактивной мощности. Условие передачи максимальной активной мощности от источника в приемник. Опытное определение параметров пассивного двухполосника. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме. Баланс мощностей. Расчет сложных электрических цепей ЭДС синусоидального тока комплексным (символическим) методом. Топографические и векторные диаграммы.

## Раздел III. Цепи синусоидального тока с индуктивными связями

Явление взаимной индукции, ЭДС взаимоиндукции, взаимная индуктивность. Магнитная энергия индуктивно связанных цепей. Баланс мощностей в магнитосвязанных цепях. Одноименные контакты индуктивно связанных катушек. Расчет сложных электрических цепей при наличии индуктивных связей. Эквивалентная замена (развязка) индуктивных связей. Индуктивность рассеяния, коэффициент индуктивной связи. Последовательное и параллельное соединение индуктивно связанных катушек. Передача энергии между индуктивно связанными элементами цепи. Уравнения и схемы замещения линейного (воздушного) трансформатора. Идеальный трансформатор. Входное и вносимое сопротивление трансформатора.

## Раздел IV. Резонансные режимы в электрических цепях

Последовательный колебательный контур, резонанс напряжений. Параллельный колебательный контур, резонанс токов. Частотные характеристики двухполосников. Понятие о резонансе в сложных цепях.

## Раздел V. Трехфазные цепи

Понятие о многофазных источниках питания и многофазных цепях. Основные схемы соединения трехфазных цепей. Расчет симметричных и несимметричных режимов трехфазных цепей. Измерение мощности в трехфазных цепях. Вращающееся магнитное поле.

## Раздел VI. Четырехполосники

Четырехполосники и их уравнения. Коэффициенты четырехполосников. Параметры холостого хода и короткого замыкания. Схемы замещения четырехполосников. Характеристические (вторичные) параметры четырехполосников. Виды соединений четырехполосников.

## Раздел VII. Цепи периодического несинусоидального тока

Несинусоидальные ЭДС, напряжения и токи. Ряд Фурье в тригонометрической форме. графоаналитический метод разложения в ряд Фурье. Влияние симметрии формы периодической кривой на ее гармонический состав. Комплексная форма ряда Фурье. Применение ряда Фурье при расчете периодического несинусоидального процесса. Максимальное, среднее и действующее значения несинусоидальных ЭДС, напряжений, токов. Мощность в цепи периодического несинусоидального тока. Коэффициенты, характеризующие форму несинусоидальных периодических кривых.

Эквивалентные синусоидальные напряжения и токи. Резонанс в цепях несинусоидального тока. Высшие гармоники в трехфазных цепях.

### Раздел VIII. Электрические фильтры

Назначения и типы фильтров. Основы теории  $k$ -фильтров. НЧ и ВЧ  $k$ -фильтры. Качественное определение  $k$ -фильтра. Основы теории  $m$ -фильтров. Каскадное включение фильтров. РС-фильтры.

## III. ТЕМАТИКА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Применение законов Ома и Кирхгофа для расчета разветвленных электрических цепей.
2. Метод контурных токов. Метод узловых потенциалов.
3. Эквивалентные преобразования линейных схем. Метод наложения. Метод подобия (пропорционального перерасчета).
4. Изображение синусоидальных функций векторами и комплексными числами. Символический (комплексный) метод расчета цепей синусоидального тока.
5. Особенности расчета цепей с индуктивными связями. Расчет резонансных режимов.
6. Расчет трехфазных цепей.
7. Расчет цепей при несинусоидальных токах.

## IV. ПЕРЕЧЕНЬ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. Ознакомительное занятие.
2. Применение законов Ома и Кирхгофа для анализа электрических цепей.
3. Эквивалентные преобразования сложной электрической цепи.
4. Применение законов равновесия для анализа электрических цепей синусоидального тока.
5. Исследование электрического резонанса.
6. Исследование трехфазной цепи при соединении фаз источника и приемника звездой.
7. Исследование параметров и схем замещения линейных четырехполюсников.

## V. ТЕМАТИКА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

1. Расчет цепи постоянного тока.
2. Расчет цепи однофазного синусоидального тока.
3. Расчет трехфазных цепей.

## VI. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

## Основная литература:

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: Учебник для Вузов. 8- э изд. - Г.: Высшая школа, 1984. - 559 с.
2. Основы теории цепей. Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов.- г.: Энергоатомиздат, 1989.-527 с.
3. Атабеков Т.И. Теоретические основы электротехники. Часть И, II - г.: Энергия, 1978. - 592 с.
4. Попов В.П. Основы теории цепей. - Г.: Высшая школа, 1985. - 496 с.
5. Сборник задач по теоретическим основам электротехники. Л.А. Бессонов, И.Т. Демидова, М.Е. Заруди и др.; Под ред. Л.А. Бессонова. - Г.: Высшая школа, 1980. - 472 с.
6. Задачник по теоретическим основам электротехники. Теория цепей. Под ред. К.М. Поливанова. - Г.: Энергия. 1973.
7. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники. Т.П. Андреев, С.Н. Андреев, И.И. Баранов и др.; Под. ред. П.А. Ионкина. - Г.: Энергоиздат, 1982. - 767 с.
8. Под. ред. П.А.Ионкина. Теоретические основы электротехники, ч.2,3. Нелинейные электрические цепи. Г.- Высшая школа, 1976.
9. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие для вузов. Под ред. П.А.Ионкина. -М.: Энергоиздат, 1982.- 768с.

## Дополнительная литература:

1. Нейман Л.Р., Демирчан К.С. Теоретические основы электротехники. Т.1,2 - Л.: Энергоиздат, 1981. - 536 с.
2. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей: Линейные цепи. - Г.: Высшая школа, 1990. - 399 с.
3. Шебес г. г., Каблукова М.В. Задачник по линейным электрическим цепям. - Г.: Высшая школа, 1990. - 543 с.
4. Бирюков В.Н. и др. Сборник задач по теории цепей. - Г.: Высшая школа, 1985. - 239 с.
5. В.Я. Ромашко. Основы анализа дискретно-линейных цепей. - К.: Либідь, 1993. - 120 с.

## Предмет и содержание курса «Теория электрических цепей»

Роль и значение электрической энергии в развитии народного хозяйства общеизвестна. Электричество стало основой развития всех отраслей техники, транспорта, электросвязи, сельского хозяйства, незаменимо в быту.

Такому широкому распространению электрической энергии во всех областях человеческой деятельности способствовало удобство передачи электромагнитной энергии на расстояние, а также удобство преобразования ее в другие формы энергии: механическую, тепловую, световую, химическую и др.

Все электротехнические, радиотехнические и электронные устройства являются электромагнитными системами, основные процессы в которых отвечают общим законам электромагнетизма.

Точный анализ этих процессов, которые описываются системой уравнений в частных производных (уравнения Максвелла), является сложной задачей даже в сравнительно простых случаях. Для инженерных расчетов и проектирования устройств необходим количественный анализ. Поэтому возникла потребность в приближенных методах анализа, которые позволяют с достаточной степенью точности решать широкий круг задач. Такие методы дает теория электрических цепей. При этом для характеристики электромагнитных процессов вместо векторных величин теории поля (напряженности электрического и магнитного полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ ), которые зависят от пространственных координат и времени, вводятся интегральные скалярные величины: ток и напряжение, которые в общем случае могут быть функциями времени.

Этот курс базируется на курсах физики и высшей математики, содержит инженерные методы расчета и анализа, которые можно применять к широкому классу современных электротехнических устройств. Он имеет исключительно важное значение для формирования научного кругозора специалистов по электронике, на нем основываются разнообразные специальные дисциплины (электронные цепи и сигналы, методы анализа электронных цепей, силовая электроника и др.).

**Предметом курса** теории цепей является изучение как с качественной, так и с количественной стороны электромагнитных процессов, происходящих в электрических цепях.

Но не все электромагнитные процессы можно анализировать на основании теории цепей. Так исследование процессов на высоких частотах (электромагнитная совместимость и др.) определение параметров элементов цепей и др. должны выполняться на основании методов *теории поля*.

Таким образом возможны два способа описания электрических и магнитных явлений: при помощи понятий *теории цепей* или *теории поля*. Выбор того или другого способа диктуется условиями решения задачи.

**Теория цепей** основывается на приближенной замене реального электротехнического устройства идеальной схемой замещения и позволяет с достаточной для инженерной практики точностью определить непосредственно

напряжение между концами участка цепи без расчетов его между промежуточными точками. Токи находят без вычисления их плотности в различных точках сечения проводника.

**Теория поля** изучает изменения электрических и магнитных величин от точки к точке в пространстве и времени, исследует напряженности электрического и магнитного полей и с их помощью такие явления, как излучение электромагнитной энергии, распределение объемных зарядов, плотностей токов и тому подобное.

**Электрической цепью** называется совокупность устройств и объектов, которые образуют путь для прохождения электрического тока. Протекание электромагнитных процессов в электрической цепи может быть описано при помощи понятий об ЭДС, напряжении и токе. В общем случае электрическая цепь состоит из источников энергии, приемников (нагрузок) и промежуточных звеньев (проводов, аппаратов, выключателей), которые соединяют источники с приемниками.

**Источниками электрической энергии** являются химические источники тока, термоэлементы, аккумуляторы, генераторы и др., в которых происходит процесс преобразования химической, молекулярно-кинетической, тепловой, механической и других видов энергии в электрическую энергию.

**Приемниками электрической энергии** (нагрузками) являются электрические лампы, электронагревательные приборы, электродвигатели и другие устройства, в которых электрическая энергия превращается в световую, тепловую, механическую или другие виды энергии.

При исследовании электрических цепей используют разнообразные предположения и некоторую идеализацию реальных объектов электрических цепей. Под **элементами** в теории цепей понимают не составные части электротехнических устройств, которые физически существуют, а их идеализированные модели, которые приближенно воспроизводят явления, происходящие в реальных устройствах. Различают активные и пассивные элементы. Активные элементы - это источники ЭДС и тока. Пассивные элементы - сопротивления, индуктивности, емкости.

**Электрический ток** в проводящей среде - это упорядоченное перемещение электрических зарядов. В металлах и вакууме это перемещение электронов, а в электролитах и газах - положительных катионов (+) и отрицательных (-) ионов. Электрическому току приписывают направление, которое совпадает с направлением перемещения положительных зарядов и противоположно движению отрицательных зарядов. Численно ток определяется как предел отношения количества электричества, перенесенного заряженными частичками сквозь поперечное сечение проводника за промежуток времени, стремящийся к нулю:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt},$$

где  $q$  - суммарное количество электричества положительных и отрицательных зарядов, которые переместились в противоположные стороны за время  $\Delta t$ .

В международной системе единиц (СИ) ток измеряют в амперах (А); заряд в кулонах (Кл) или ампер - секундах (А·с); время в секундах (с).

**Ампер** - величина неизменного тока, который проходя по двум параллельным прямоугольным проводникам бесконечной длины и пренебрежимо малого сечения, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную  $2 \times 10^{-7} \text{ Н}$  на каждый метр длины.

Электрический ток может быть постоянным или переменным, изменяющимся со временем.

Направление тока характеризуется знаком. **Положительное направление тока** выбирается произвольно и обозначается стрелкой. Если в результате расчета тока, осуществленного с учетом выбранного положительного направления, ток имеет знак плюс ( $i > 0$ ), то его действительное направление в цепи совпадает с положительным направлением. В противном случае наоборот.

На рис.1 изображен участок цепи, по которому проходит ток  $i$ .

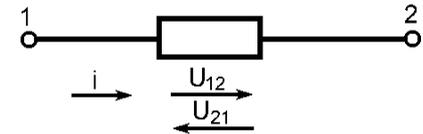


Рис.1

Разность потенциалов точек 1 и 2 является напряжением на этом участке цепи.

**Разность электрических потенциалов** - это электрическое напряжение в безвихревом электрическом поле, которое характеризуется независимостью выбора пути интегрирования. Определяется работой на перемещение единичного положительного заряда от точки 1 к точке 2.

**Электрическое напряжение  $[u]$**  это скалярная величина, которая равна линейному интегралу от напряженности электрического поля. Напряжение может быть постоянным или переменным; измеряется в вольтах (В).

Для придания определенного смысла знаку напряжения на участке цепи выбирается положительное направление напряжения (которое как правило совпадает с положительным направлением тока  $i$ ). Если положительное направление выбрано от точки 1 к точке 2, то  $u > 0$ , если потенциал точки 1 больше потенциала точки 2, в противном случае напряжение будет отрицательным. Можно задавать положительное направление при помощи индексов, например  $U_{12}$ ,  $U_{21}$ . Тогда напряжение  $U_{12}$  будет совпадать с положительным направлением тока. Напряжение, которое вычисляется в обратном направлении, будет иметь противоположный знак:

$$U_{21} = -U_{12}.$$

Пусть через участок электрической цепи (приемник) под действием приложенного напряжения  $u$  проходит электрический заряд  $q$ . Элементарная работа, которая выполняется при этом (элементарная энергия которая поступает в приемник), будет равняться:

$$dw = u \cdot dq = u \cdot i \cdot dt.$$

Скорость, с которой электрическая энергия поступает в цепь в данный момент времени, называется **мгновенной мощностью**

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = u \cdot \frac{dq}{dt} = u \cdot i$$

Мгновенная мощность величина алгебраическая ( $p > 0$ , если  $u(t)$  и  $i(t)$  имеют одинаковые знаки). Если  $p > 0$  энергия поступает в приемник. При  $p < 0$  энергия возвращается от приемника к источнику.

Энергия, которая поступает в приемник за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , выражается интегралом:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt.$$

В отличие от мгновенной мощности, энергия, которая поступает в приемник, не может быть отрицательной (в противном случае это будет не приемник, а источник).

Работа и энергия измеряются в джоулях (Дж), а мощность в ваттах (Вт).

### Электрическая цепь и её элементы: сопротивление, индуктивность, ёмкость, источники ЭДС и тока и их характеристики

**Сопротивлением** называется идеализированный элемент цепи, приближенно заменяющий резистор, в котором происходит необратимый процесс преобразования электрической энергии в тепловую. При этом сам термин «сопротивление» и соответствующее ему буквенное обозначение  $[R]$  используют как для обозначения самого элемента цепи, так и для количественной оценки величины, которая равна отношению напряжения на этом элементе цепи к току, который проходит через него (закон Ома, который получен экспериментально 1826 г.):

$$R = \frac{u(t)}{i(t)}.$$

Величина обратная сопротивлению называется **проводимостью**:

$$G = \frac{1}{R}.$$

Единицы измерения соответственно:  $[Ом]$  и Сименс  $[См]$ .

Условное графическое изображение сопротивления с обозначением выбранных положительных направлений тока и напряжения показано на рис.2.

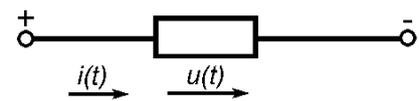


Рис.2

Мгновенная мощность, которая поступает в сопротивление:

$$p_R(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = G \cdot u^2(t).$$

Электрическая энергия, которая поступила в сопротивление  $R$  и превратилась в тепло, начиная с момента  $t = 0$ , равняется:

$$W_R = \int_0^t P_R(t) dt = \int_0^t R \cdot i^2(t) dt = \int_0^t G \cdot u^2(t) dt .$$

Если ток постоянный:

$$i(t) = I = const; \quad W_R = R \cdot I^2 \cdot t$$

На рис.3 показана зависимость напряжения от тока *вольт - амперная характеристика* (ВАХ). Параметр  $R$  в общем случае зависит от тока (кривая 2). Для линейных цепей  $R = const$  (кривая 1).

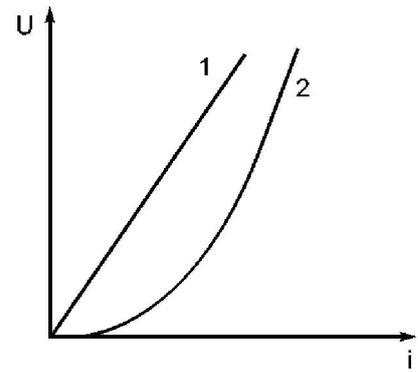


Рис.3

**Индуктивностью** называется идеализированный элемент электрической цепи, приближающийся по своим свойствам к катушке индуктивности, в которой накапливается энергия магнитного поля. Условное графическое изображение индуктивности с указанием положительных направлений тока и напряжения приведено на рис.4.

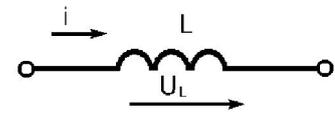


Рис.4

Термин «индуктивность» и соответствующее ему условное обозначение  $L$  используют как для обозначения самого элемента цепи, так и для количественной оценки отношения потокосцепления самоиндукции к току в этом элементе:

$$L = \frac{\psi}{i} .$$

Единицы измерения  $L$  и  $\psi$  соответственно Генри (Гн) и Вебер (Вб).

Зависимость  $\psi$  от  $i$  (рис.5) в общем случае нелинейная потому, что  $L$  зависит от тока (кривая 1). Если зависимость  $\psi(i)$  линейная (кривая 2), то  $L = const$ .

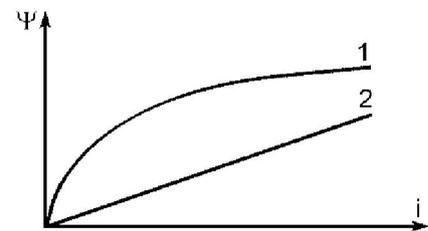


Рис.5

Изменение потокосцепления самоиндукция вызывает ЭДС самоиндукция которая противодействует изменению  $\psi$  (знак «-»):

$$e_L = -\frac{d\psi}{dt} .$$

Если  $L$  не зависит от тока  $i$ , то:

$$e_L = -L \frac{di}{dt} .$$

Положительное направление напряжения на индуктивности  $u_L$  совпадает с положительным направлением тока  $i$ :

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} .$$

Ток в индуктивности в данный момент времени:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(t) dt.$$

Если  $t = 0$ , то начальное значение тока:

$$i(0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L(t) dt.$$

Тогда можно записать

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt.$$

Мгновенная мощность, которая поступает в индуктивность:

$$p_L(t) = u_L(t) \cdot i_L(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt}.$$

Энергия магнитного поля для времени  $t$  (учтено, что для  $t = -\infty$   $i(-\infty) = 0$ ):

$$w_L = \int_{-\infty}^t p_L(t) dt = \int_0^i Li(t) di = \frac{Li^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}.$$

**Емкостью** называется идеализированный элемент электрической цепи, приближенно заменяющий конденсатор, в котором накапливается энергия электрического поля. Термин «емкость» и соответствующее ему буквенное обозначение  $C$  используется как для обозначения самого элемента цепи, так и для количественной оценки отношения заряда к напряжению на этом элементе:

$$C = \frac{q}{u_c}.$$

Единица измерения: фарада [ $\Phi$ ].

Зависимость заряда от напряжения в общем случае нелинейная (характеристика 1, рис.6), т.е.  $C$  зависит от  $u_c$ . Мы будем рассматривать только линейные цепи, когда  $C = const$  (характеристика 2).

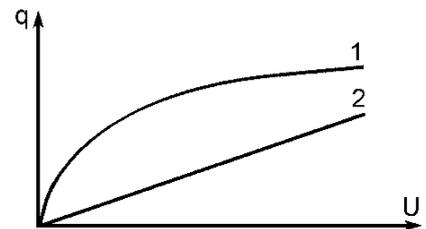


Рис.6

Ток емкости определяется скоростью изменения заряда:

$$i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt} \Big|_{C=const}.$$

Напряжение на емкости:

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt.$$

При  $t = 0$  начальное значение напряжения на емкости:

$$u_C(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C(t) dt.$$

Тогда для напряжения на емкости в произвольный момент времени можно записать:

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt.$$

Условное графическое изображение емкости с обозначением положительных направлений тока и напряжения показано на рис.7.

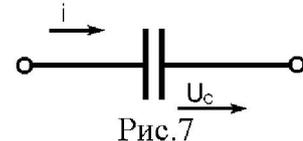


Рис.7

Мгновенная мощность, которая поступает в емкость:

$$p_C(t) = u_C(t) \cdot i_C(t) = C u_C(t) \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Она связана с процессом накопления или уменьшения заряда в емкости. Если к емкости  $C$  приложено напряжение  $u_c(t)$ , то энергия электрического поля для произвольного момента времени определяется по формуле (учтено, что для  $t = -\infty$   $u_c(-\infty) = 0$ ):

$$w_C = \int_{-\infty}^t p_C(t) dt = \int_0^{u_C} C \cdot u_C du_C = \frac{C \cdot u_C^2}{2} = \frac{q^2}{2 \cdot C}.$$

В теории цепей пользуются идеальными источниками электрической энергии: источниками ЭДС и тока.

**Идеальный источник ЭДС (напряжения)** - это активный элемент с двумя выводами, напряжение на которых не зависит от тока, проходящего через источник. Считается, что внутри такого идеального источника пассивные элементы ( $R$ ,  $C$ ,  $L$ ) отсутствуют, а поэтому прохождение тока не вызывает в нем падения напряжения.

Упорядоченное перемещение положительных зарядов внутри источника от вывода с меньшим потенциалом к выводу с большим потенциалом возможно за счет *сторонних сил* (сил неэлектрической природы). Работа, расходуемая сторонними силами на перемещение единицы положительного заряда от вывода «-» к выводу «+», называется *электродвижущей силой* (ЭДС) источника. Положительное направление ЭДС источника показано стрелкой (рис.8).

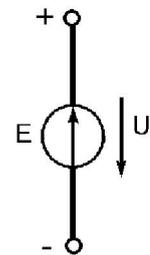


Рис.8

Ток в пассивной электрической цепи, которая присоединена к источнику ЭДС зависит от параметров этой цепи и ЭДС источника. Если выводы идеального источника ЭДС замкнуть накоротко, то теоретически ток должен быть бесконечно большим. Такой источник является источником бесконечной мощности, что физически не возможно.

В действительности при замыкании контактов реального источника энергии ток может иметь только определенное значение, потому что ЭДС источника уравнивается падением напряжения на внутреннем сопротивлении источника.

Источник ЭДС конечной мощности (реальный источник) можно представить в виде идеального источника ЭДС с присоединенным последовательно к нему пассивным элементом, который характеризует внутренние параметры источника и ограничивает мощность, которая поступает во внешнюю цепь (рис.9).

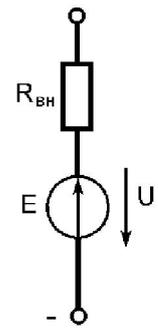


Рис.9

**Идеальный источник тока** - это такой активный элемент, ток которого не зависит от напряжения на его выводах. Внутреннее сопротивление такого источника бесконечно большое  $R_{вн}$ , а поэтому параметры внешней электрической цепи, от которых зависит напряжение на контактах источника, не влияют на ток источника. Условное графическое изображение этого источника показано на рис.10.

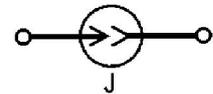


Рис.10

Стрелки показывают положительное направление тока источника. При бесконечном увеличении сопротивления внешней цепи, присоединенной к идеальному источнику тока, напряжение на его выводах и мощность бесконечно возрастут. Поэтому идеальный источник тока также физически существовать не может. Источник тока конечной мощности (реальный источник) изображается в виде идеального источника тока, параллельно к выводам которого присоединен пассивный элемент, учитывающий внутренние параметры источника и ограничивающий мощность, которая отдается во внешнюю цепь (рис.11).

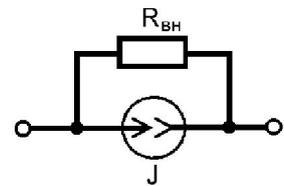


Рис.11

Вольтамперные характеристики (ВАХ, внешние) идеальных источников ЭДС и тока изображаются прямыми линиями, параллельными осям  $u$  и  $i$  соответственно (рис.12, а). Одна из наиболее типичных внешних характеристик нагруженного реального источника показана на рис.12, б.

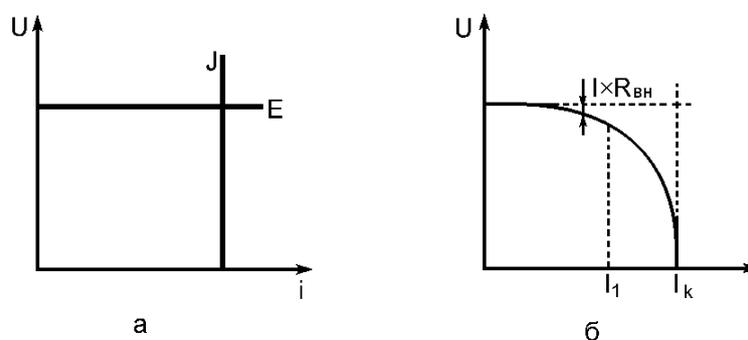


Рис.12

При увеличении тока от нуля до  $I_1$  напряжение на выводах источника уменьшается по линейному закону:

$$U = E - IR_{вн}.$$

При дальнейшем росте тока пропорциональность между его величиной и уменьшением напряжения нарушается. Характеристика становится нелинейной. В одних источниках энергии это связано с уменьшением ЭДС, в других - с ростом внутреннего сопротивления, а в третьих - с первым и вторым.

Источник питания с ЭДС  $E$  и внутренним сопротивлением  $R_{вн}$  (реальный источник) может быть представлен одной из двух эквивалентных схем (рис.13,а,б).

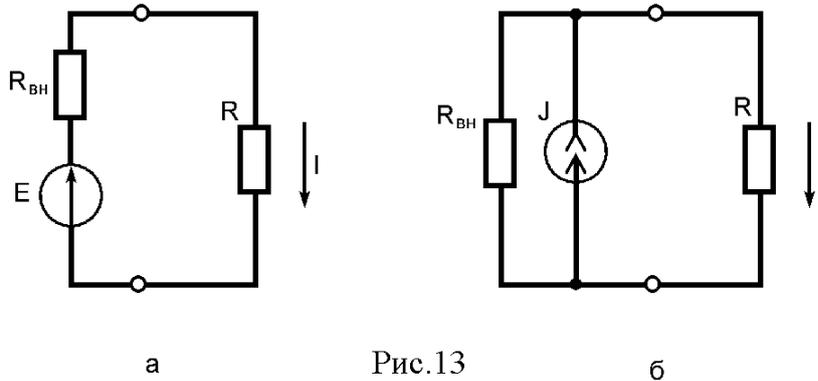


Рис.13

Ток в нагрузке (сопротивлении  $R$ ) будет одинаковым для обеих схем:

$$I = \frac{E}{R + R_{вн}} .$$

Параметры этих источников взаимно однозначно связаны между собой :

$$J = \frac{E}{R_{вн}}; \quad E = J \cdot R_{вн} .$$

Если  $R_{вн} \gg R$  источник энергии приближается к источнику тока, а если  $R_{вн} \ll R$  - то к источнику напряжения (ЭДС).

Подчеркнем следующее:

1. Источники ЭДС и тока это идеальные источники, физическая реализация которых невозможна.
2. Схемы замещения реальных источников эквивалентны по отношению к энергии, которая отдается в нагрузку  $R$ , но не эквивалентны по отношению к энергии, которая выделяется на внутреннем сопротивлении источника.
3. Идеальный источник ЭДС нельзя заменить идеальным источником тока.

### **Замещение физических устройств идеальными элементами цепи**

Представление о сопротивлении, индуктивности и емкости как об идеальных элементах электрической цепи основывается на предположении, что потери энергии, магнитное и электрическое поля сосредоточиваются в отдельных, независимых друг от друга, элементах цепи. Раздельное рассмотрение сопротивления, индуктивности и емкости отражает приближенный метод исследования цепи.

Электрическое сопротивление проводника на постоянном токе зависит от длины проводника  $l$  площади поперечного сечения  $S$ , и удельного сопротивления  $\rho$ :

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} .$$

**Удельное сопротивление** величина обратная к удельной проводимости, которая равна отношению плотности тока проводимости к напряженности электрического поля. В широких пределах зависимость удельного сопротивления проводника от температуры почти прямолинейна. Для металлов  $\rho$  растет с повышением температуры, а для неметаллических проводников (угля и др.) и электролитов спадает.

Понятие сопротивления непосредственно связано с потерями энергии - необратимым процессом поглощения электромагнитной энергии. Количество тепла, которое выделяется при прохождении тока по любому проводнику, зависит от ряда факторов, в том числе и от частоты тока.

На низких частотах сопротивление проводника мало отличается от сопротивления при постоянном токе. С повышением частоты ток распределяется по сечению проводника неравномерно: внутри проводника плотность тока уменьшается; ток вытесняется к поверхности проводника, что приводит к уменьшению сечения проводника и к повышению сопротивления. Это явление имеет название *поверхностный эффект (скин-эффект)*. Неравномерность распределения тока по сечению проводника, а следовательно рост тепловых потерь, происходит также под влиянием тока, который проходит по соседнему проводнику (эффект близости).

Переменное магнитное поле наводит в проводнике вихревые токи, что приводит к дополнительным расходам энергии на нагрев.

На высоких частотах происходит излучение электрической энергии в пространство, что вызывает дополнительный рост сопротивления.

*Сопротивление потерь обмотки трансформатора на ВЧ может повышаться в 10 раз по сравнению с сопротивлением на НЧ.*

Вследствие присутствия электрического и магнитного полей проводник наряду с сопротивлением имеет определенные индуктивность и емкость. Для уменьшения собственной индуктивности и емкости проводников, резисторы выполняются в виде пластинчатых или плетеных элементов. Широко применяют непроволочные резисторы.

*Вычисления сопротивления, индуктивности и емкости проводника с учетом указанных выше факторов относится к задачам теории поля.*

Рассмотрим простейшую индуктивную катушку в виде нескольких круговых витков проводника, по которым проходит ток. При постоянном токе напряжение на выводах катушки определяется падением напряжения на ее омическом сопротивлении в соответствии с законом Ома. При этом ток во всех точках будет одинаков. При переменном токе переменное магнитное поле наводит в витках ЭДС самоиндукции. Между витками, а также между отдельными точками смежных витков электрическое

поле становится переменным. При этом появляется ток смещения между витками. В связи с этим ток в различных витках будет различным. Чем выше частота переменного тока, тем больше будет ЭДС самоиндукции и ток смещения. На низких частотах током смещения можно пренебречь. Но на высоких частотах ток смещения может быть сравним по величине с током в витках или даже превышать его.

Таким образом, в зависимости от диапазона частот индуктивная катушка может быть представлена (рис.14) :

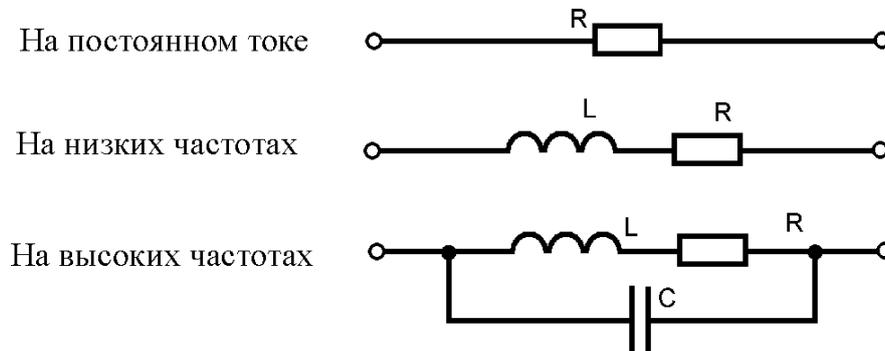


Рис.14

Рассмотрим плоский конденсатор из двух параллельных пластин, разделенных диэлектриком. При постоянном напряжении и идеальном диэлектрике тока в цепи не будет. Если напряжение переменное, то в процессе изменения электрического заряда возникает переменный ток, который создает переменное магнитное поле. Эффект, который создается магнитным полем, может быть учтен в электрической схеме замещения при помощи индуктивности, включенной последовательно с емкостью конденсатора. В большинстве случаев этой индуктивностью пренебрегают, потому что она относительно мала. Кроме того, в диэлектрике вследствие некоторой проводимости появляются тепловые потери, которые также растут с частотой. Эти потери учитываются в схеме замещения конденсатора при помощи сопротивления, который включают параллельно емкости (рис.15).

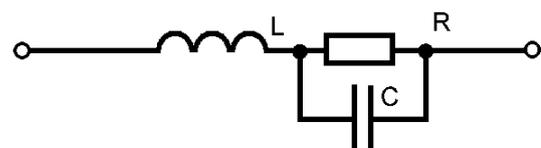


Рис.15

Чем выше частота и большие линейные размеры самих устройств, то в большей мере сказывается взаимосвязь электрических и магнитных параметров, а также неотделимость друг от друга электрического и магнитного полей, которые являются двумя сторонами единого электромагнитного поля.

Четко выделить диапазоны частот, при которых нужна та или другая схема замещения невозможно, потому что это зависит от многих факторов. Составление схем замещения нуждается в точном знании процессов и режимов работы устройств, учете цели и точности расчетов.

## Основные определения в электрических схемах

**Электрическая схема** - это графическое изображение электрической цепи. Она показывает как соединены элементы электрической цепи.

«*Электрическими*» элементами схемы являются активные и пассивные элементы цепи. «*Геометрическими*» элементами схемы являются ветви и узлы.

**Ветвь электрической цепи** - это участок цепи, по которому проходит один и тот же ток. Ветвь образуется одним или несколькими последовательно соединенными элементами цепи (рис.16, а). В общем случае, если состав ветви неизвестен, она изображается прямоугольником (рис.16, б).

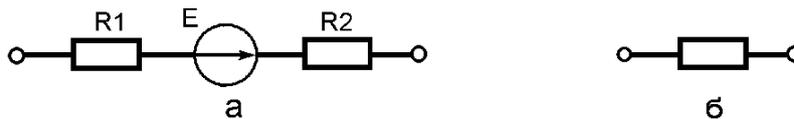


Рис.16

**Узел** - это место соединения трех или большего числа ветвей (рис.17, а, б). Место соединения двух ветвей рассматривается как «устраняемый узел» (рис.17, в).

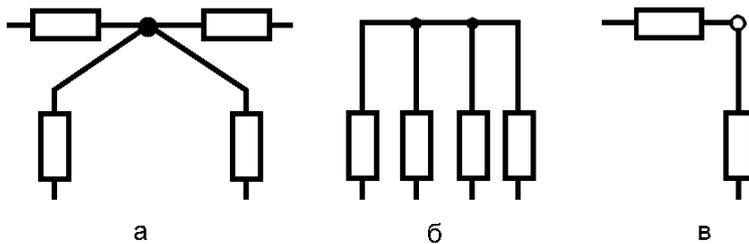


Рис.17

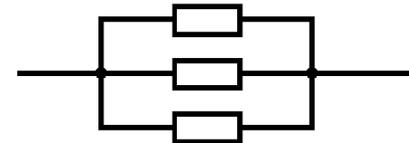


Рис.18

Линии, которые соединяют ветви в схеме, имеют нулевые сопротивления. Поэтому схемы на рис.17, а, б с точки зрения электрического соединения одинаковы (имеют один узел), хотя они и различаются графическим изображением. Ветви, присоединенные к одной паре узлов, называются параллельными (рис.18).

Схему на рис.19 содержит пять ветвей и три узла. Любой замкнутый путь, который проходит по нескольким ветвям и не пересекает дважды один и тот же узел, называется **контуром**. На рис.19 показаны некоторые возможные варианты контуров.

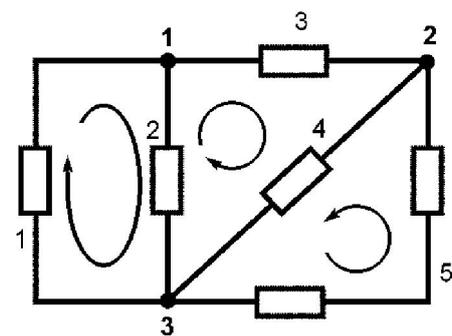


Рис.19

**Соединение звездой** - это соединение трех ветвей, имеющих один общий узел (рис.20).

**Соединение треугольником** - это соединение трех ветвей, которое имеет вид треугольника, сторонами которого являются ветви, а вершинами узлы (рис.21).

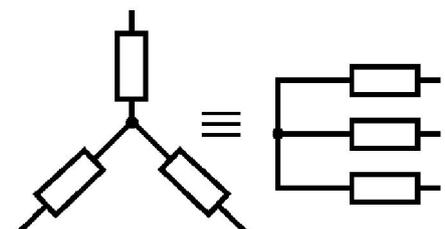


Рис.20

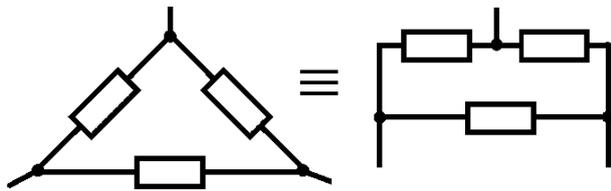


Рис.21

Схема изображена таким образом, что на ней показана совокупность ветвей и узлов без конкретизации того, какие элементы находятся в каждой ветви, называется **топологической схемой** или **графом** (рис.22, а).

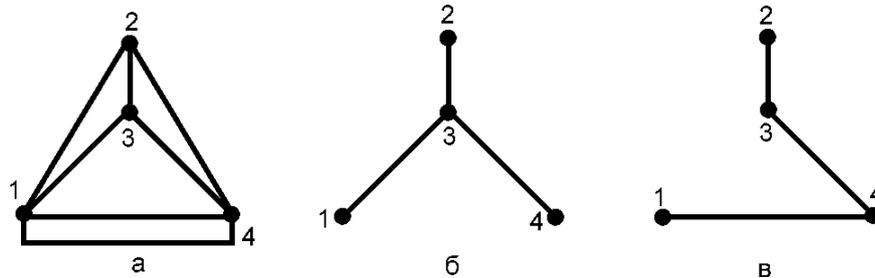


Рис.22

Совокупность ветвей, соединяющих все узлы, но не образующих замкнутых контуров, называется **деревом графа** (рис.22, б, в). Ветви графа, которые вошли в дерево, называют **ветвями дерева (ребрами)**, а все остальные ветви - **хордами**. Контур, образованный некоторой совокупностью ветвей дерева и одной из хорд называется **главным контуром**. Главные контуры образуют систему независимых контуров.

Если  $n$  количество узлов;  $l$  количество ветвей, то количество ветвей дерева будет  $\nu = n - 1$ , а количество хорд  $m = l - \nu = l - n + 1$ . Это также и количество независимых контуров.

### Закон Ома для участка цепи с ЭДС

Этот закон позволяет найти ток на участке цепи по известной разности потенциалов на концах участка и ЭДС. Положительное направление напряжения  $U_{ab}$  совпадает с положительным направлением тока  $I$  (рис.23).

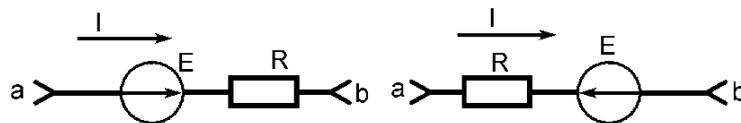


Рис.23

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R} \qquad I = \frac{U_{ab} - E}{R} .$$

В общем случае:

$$I = \frac{U_{ab} + \sum_k E_k}{\sum_m R_m} ,$$

где  $U_{ab}$  - напряжение на участке  $a-b$  цепи (с учетом положительного направления тока);  $\sum_k E_k$  - алгебраическая сумма ЭДС, действующих на этом

участке цепи. Если направление ЭДС совпадает с направлением тока, то берут знак «+», в противном случае знак «-»;  $\sum_m R_m$  - суммарное сопротивление участка цепи.

**Пример.** Найти ток в цепи рис.24.

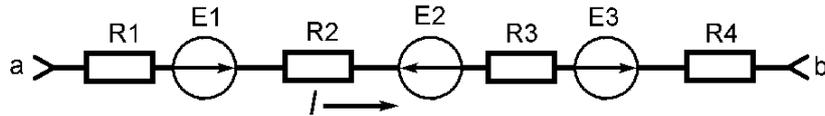


Рис.24

$$I = \frac{U_{ab} + E1 - E2 + E3}{R1 + R2 + R3 + R4}.$$

Если в результате расчетов получено отрицательное значение тока, то это значит, что действительное направление тока противоположно выбранному.

Используя закон Ома можно находить токи, или (если токи известны) потенциалы точек цепи и напряжения.

**Пример.** Рассмотрим цепь на рис.25. Найдем напряжение на участке  $a - b$  и потенциал точки  $b$  относительно точки  $a$

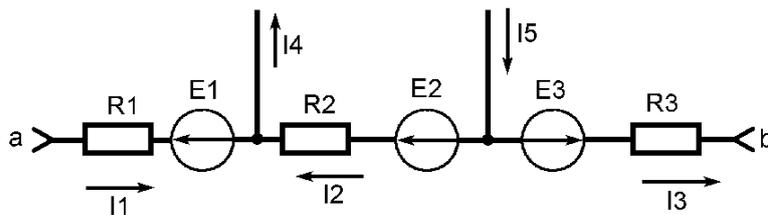


Рис.25

$$U_{ab} = R_1 I_1 + E_1 - I_2 R_2 + E_2 - E_3 + I_3 R_3; \quad U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b;$$

$$\varphi_b = \varphi_a - U_{ab} = \varphi_a - I_1 R_1 + E_1 + I_2 R_2 - E_2 + E_3 - I_3 R_3.$$

### Потенциальная диаграмма

**Потенциальная диаграмма** - это график распределения потенциала вдоль какого-нибудь участка цепи или замкнутого контура. Вдоль оси абсцисс откладывают сопротивления участка цепи, а вдоль оси ординат - потенциалы точек. Каждой точке цепи соответствует своя точка на потенциальной диаграмме. При продвижении через источник ЭДС в направлении, которое совпадает с направлением ЭДС « $E$ », потенциал скачком увеличивается на величину ЭДС « $E$ » (при встречном направлении ЭДС потенциал скачком уменьшается). При прохождении через сопротивление  $R$  в направлении тока потенциал уменьшается линейно на величину падения напряжения  $R \cdot I$  (при встречном направлении тока линейно возрастает).

Тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс пропорционален току:

$$\operatorname{tg} \alpha = I \frac{m_R}{m_\varphi} \quad \parallel \quad m_R, m_\varphi - \text{масштабы коэффициентов по осям.}$$

**Пример.** Рассмотрим неразветвленную цепь, содержащую источники ЭДС и сопротивления (рис.26).

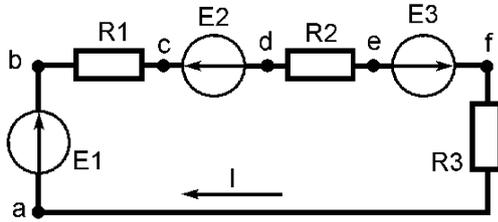


Рис.26

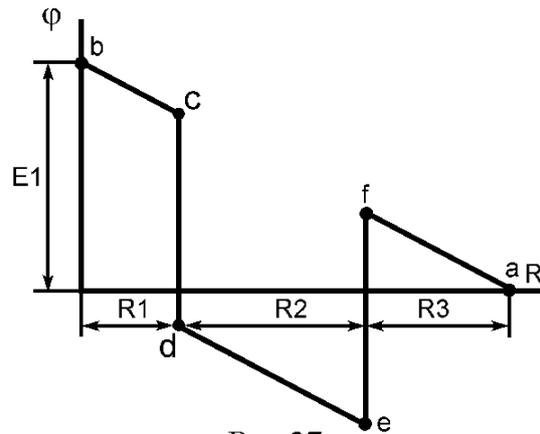


Рис.27

Обозначаем точки цепи буквами (или цифрами). Строим потенциальную диаграмму с учетом выбранного направления тока (рис.27). Если специально не оговорено, то точку нулевого потенциала выбираем произвольно. На диаграмме наклон прямых линий одинаковый, потому что ток на всех участках один и тот же. В общем случае для разветвленной цепи наклон прямых будет различным.

Преимущества: наглядность; можно легко определить напряжение между произвольными точками цепи.

Недостатки: низкая точность.

### Баланс мощностей в электрических цепях

При прохождении токов по сопротивлениям они рассеивают тепло. Согласно закону сохранения энергии количество теплоты, которое выделяется за единицу времени в сопротивлениях цепи, должно равняться энергии, которая поступает в цепь за то же время от источников энергии.

Если направление тока  $I$ , совпадает с направлением ЭДС  $E$ , то источник отдает в цепь мощность (энергию за единицу времени), которая равняется  $E \cdot I$ . Если направления тока и ЭДС противоположны, то источник потребляет энергию (например, заряд аккумулятора) и тогда произведение  $E \cdot I$  входит в уравнение энергетического баланса со знаком «-».

Мощность источника тока определяется произведением напряжения на его выводах и тока источника с учетом положительных направлений (рис.28):

$$P = JU_{ab} = -JU_{ba}.$$

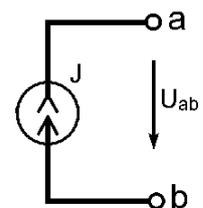


Рис.28

Общий вид уравнения баланса мощностей:

$$\underbrace{\sum_k I_k^2 R_k}_{P_n} = \underbrace{\sum_m E_m I_m + \sum_l J_l U_l}_{P_{ист}}$$

где  $P_n$  - мощность нагрузок;  $P_{ист}$  - мощность источников.

*Алгебраическая сумма мощностей, генерируемых всеми источниками цепи, равна арифметической сумме мощностей, которые потребляются всеми нагрузками.*

Баланс мощностей используют для оценки правильности проведенных расчетов (измерений). Погрешность баланса определяется по формуле:

$$\delta_p = \frac{|P_{ист} - P_n|}{\frac{P_{ист} + P_n}{2}} \cdot 100\% \leq 0,5\% .$$

### Законы Кирхгофа и их применения для расчета разветвленных цепей

Основными законами теории цепей наряду с законом Ома являются закон баланса токов в разветвлениях (*1-й закон Кирхгофа*) и баланса напряжений на замкнутых участках цепи (*2-й закон Кирхгофа*). Этим законам соответствуют процессы во всех электрических цепях (линейных и нелинейных) при произвольном характере изменения во времени токов и напряжений.

**1-й закон Кирхгофа:** *Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:*

$$\sum_k I_k = 0.$$

Знаки токов выбираются с учетом положительных направлений токов. Всем токам, направленным к узлу присваивается одинаковый знак, например «+», а токи направленные от узла имеют знак «-» (рис.29):

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0.$$

Первый закон Кирхгофа выражает тот факт, что в узле электрический заряд не накапливается и не расходуется. Сумма электрических зарядов (токов), которые втекают в узел, равно сумме зарядов (токов), которые вытекают из узла за один и тот же промежуток времени.

Первый закон Кирхгофа может быть применен не только для узла, но и для замкнутой поверхности, которая охватывает часть электрической цепи (обобщенный узел) (рис.30).

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad \text{або} \quad I_1 = I_2 + I_3.$$

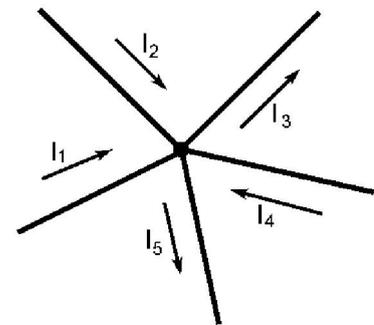


Рис.29

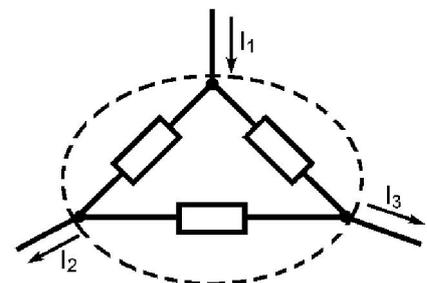


Рис.30

**2-й закон Кирхгофа** : алгебраическая сумма ЭДС в замкнутом контуре равна алгебраической сумме падений напряжений на элементах этого контура:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_m E_m .$$

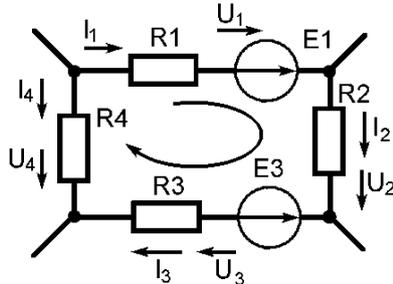


Рис.31

Обход контура производят в произвольно выбранном направлении (например, по часовой стрелке). При этом ЭДС и падения напряжений, совпадающие с выбранным направлением, берутся со знаком «+» (рис.31):

$$U_1 + U_2 + U_3 - U_4 = E_1 - E_3 .$$

Рассмотренная ранее потенциальная диаграмма является графической иллюстрацией второго закона Кирхгофа.

Если известны все элементы цепи и её конфигурация, то законы Кирхгофа позволяют определить токи в ветвях цепи.

Перед составлением уравнений необходимо:

- выбрать положительные направления токов во ветвях и обозначить их на схеме;
- выбрать положительные направления обхода контуров и обозначить их на схеме.

Пусть схема содержит  $l$  ветвей и  $n$  узлов. В общем случае нужно определить токи во всех ветвях: количество неизвестных равняется  $l$ . По первому закону Кирхгофа можно составить  $(n-1)$  линейно-независимое уравнение.  $(n-1)$  - количество независимых сечений схемы (равно количеству ветвей дерева).

Тогда по второму закону Кирхгофа нужно составить  $l - (n-1) = l - n + 1$  уравнений (равно количеству независимых (главных) контуров.)

Таким образом система будет состоять из  $l$  независимых уравнений. При этом количество уравнений будет соответствовать количеству неизвестных.

При составлении линейно-независимых уравнений по второму закону Кирхгофа нужно следить за тем, чтобы в каждый новый контур, для которого составляется уравнение, входила хотя бы одна новая ветвь. Такие контуры будут независимыми. При этом контура не должны содержать источники тока.

*Систему независимых контуров удобно выбирать, используя дерево графа схемы: независимый контур получают, подключив хорду к некоторой совокупности ветвей дерева (ребер).*

Если схема содержит источники тока, то количество неизвестных будет равняться  $(l - k)$ , т.к. токи в ветвях с источниками тока будут уже известны ( $k$  - количество ветвей с источниками тока). В этом случае уменьшается количество уравнений по второму закону Кирхгофа  $(l - n - k + 1)$ .

**Пример.**

Найти токи в цепи рис.32.

Для данной цепи  $l = 7; n = 4; k = 1$ .

Выбираем и обозначаем на схеме положительные направления токов.

По первому закону нужно составить  $(n-1)=3$  уравнений.

По второму закону -  $(l-n-k+1)=3$

Выбираем систему независимых контуров и обозначаем направления их обхода. Составляем систему уравнений:

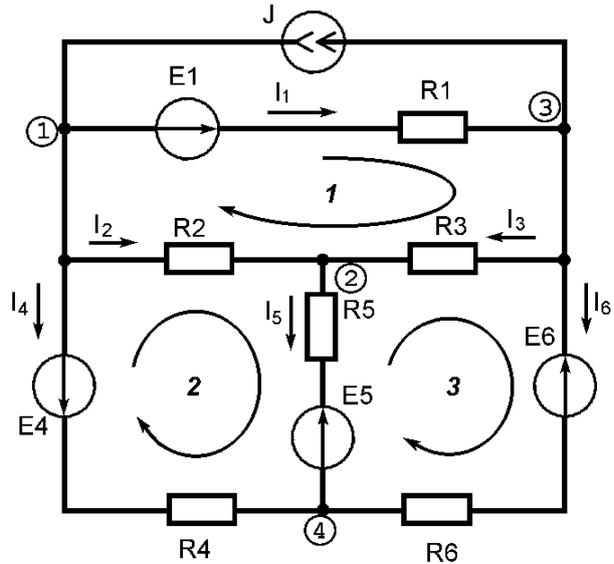


Рис.32

$$\left. \begin{cases} J - I_1 - I_2 - I_4 = 0 \\ I_2 + I_3 - I_5 = 0 \\ I_1 - I_3 - I_6 - J = 0 \end{cases} \right\} \text{ по 1-му закону}$$

$$\left. \begin{cases} I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 = E_1 \\ I_2 R_2 - I_4 R_4 + I_5 R_5 = -(E_4 + E_5) \\ -I_3 R_3 - I_5 R_5 + I_6 R_6 = E_5 - E_6 \end{cases} \right\} \text{ по 2-му закону}$$

Решив данную систему линейных алгебраических уравнений, находим токи  $I_1 - I_6$ .

Составляем баланс мощностей:

$$E_1 I_1 + E_4 I_4 - E_5 I_5 - E_6 I_6 + U_{13} J = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6.$$

Погрешность баланса:

$$\delta_p = \frac{|P_{уст} - P_n|}{P_{уст} + P_n} \cdot 100\% \leq 0,5\%.$$

2

**Метод контурных токов**

При помощи законов Кирхгофа можно провести расчеты процессов в любой электрической цепи. Но очень существенным недостатком этого метода является большое количество исходных уравнений для сложных схем и трудоемкость вычислений.

По методу контурных токов для расчетов сложной цепи можно ограничиться составлением и решением только  $(l-n+1)$  уравнений. Таким образом, метод является более экономичным по сравнению с методом законов Кирхгофа, т.к. требует составления и решения значительно меньшего

количества уравнений (особенно это проявляется при анализе схем с большим количеством узлов).

Для вывода основных расчетных соотношений рассмотрим такой пример. Рассчитать токи в цепи на рис.33.

Выбираем положительные направления контурных токов  $J_1, J_2$  и обозначаем их на схеме. Исходные уравнения составляются для контурных токов. Согласно второму закону Кирхгофа для независимых контуров можно записать (направление обхода контуров совпадает с направлением контурного тока):

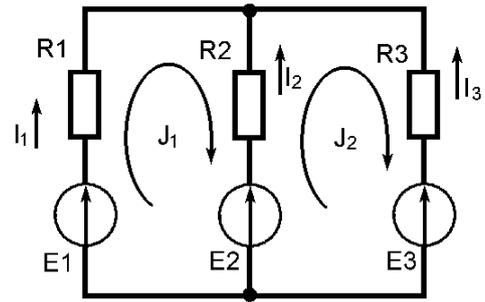


Рис.33

$$\begin{cases} R_1 J_1 + R_2 J_1 - R_2 J_2 = E_1 - E_2 \\ R_2 J_2 + R_3 J_2 - R_2 J_1 = E_2 - E_3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (R_1 + R_2) J_1 - R_2 J_2 = E_1 - E_2 \\ -R_2 J_1 + (R_2 + R_3) J_2 = E_2 - E_3 \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_2; & R_{12} &= R_{21} = -R_2; & R_{22} &= R_2 + R_3; \\ E_{11} &= E_1 - E_2; & E_{22} &= E_2 - E_3. \end{aligned}$$

Тогда систему уравнений можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} R_{11} J_1 + R_{12} J_2 = E_{11} \\ R_{21} J_1 + R_{22} J_2 = E_{22} \end{cases}$$

где  $R_{11}, R_{22}$  - собственные сопротивления контуров (сумма всех сопротивлений данного контура);  $R_{12}, R_{21}$  - взаимные сопротивления контуров (сумма сопротивлений общих ветвей двух контуров). Взаимные сопротивления определяются с учетом направлений контурных токов: если направления контурных токов в общей ветви совпадают, то будет знак «+», в противном случае - знак «-»;  $E_{11}, E_{22}$  - контурные ЭДС. Это алгебраическая сумма ЭДС соответствующего контура. Если направление ЭДС совпадает с направлением контурного тока то будет знак «+», а иначе - знак «-».

Решив систему уравнений, находим контурные токи  $J_1$  и  $J_2$  и при помощи простых алгебраических соотношений выражаем токи ветвей схемы через контурные токи. Токи в ветвях, которые являются общими для нескольких контуров, определяются алгебраической суммой соответствующих контурных токов:

$$I_1 = J_1; \quad I_2 = J_2 - J_1; \quad I_3 = -J_2.$$

В общем случае для схемы, которая имеет  $m$  независимых контуров, исходная система из  $m$  уравнений будет иметь такой вид:



**Пример.** Рассчитать схему на рис.34 методом контурных токов.

Выбираем и указываем на схеме положительные направления токов в ветвях и обозначаем их  $I_1 - I_6$ .

Определяем число независимых контуров:

$$l = 7; n = 4; k = 1;$$

$$m = l - n + 1 = 7 - 4 + 1 = 4.$$

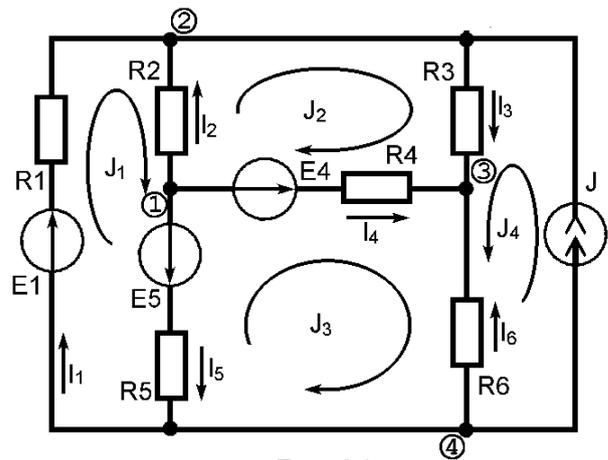


Рис.34

Выбираем систему независимых контуров и обозначаем на схеме контурные токи  $J_1 - J_4$ . Количество уравнений в исходной системе  $m - k = 4 - 1 = 3$  ( $J_4 = J$ , т.е. для четвертого контура уравнение составлять не нужно):

$$\begin{cases} R_{11}J_1 + R_{12}J_2 + R_{13}J_3 + R_{14}J_4 = E_{11} \\ R_{21}J_1 + R_{22}J_2 + R_{23}J_3 + R_{24}J_4 = E_{22} \\ R_{31}J_1 + R_{32}J_2 + R_{33}J_3 + R_{34}J_4 = E_{33} \end{cases}.$$

За законами Кирхгофа нужно было бы составить 6 уравнений!

Определяем коэффициенты системы уравнений:

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5; R_{22} = R_2 + R_3 + R_4; R_{33} = R_4 + R_5 + R_6; R_{12} = R_{21} = -R_2;$$

$$R_{13} = R_{31} = -R_5; R_{14} = 0; R_{23} = R_{32} = -R_4; R_{24} = R_3; R_{34} = R_6;$$

$$E_{11} = E_1 + E_5; E_{22} = -E_4; E_{33} = E_4 - E_5.$$

Решив полученную систему из трех уравнений с тремя неизвестными, находим контурные токи  $J_1, J_2, J_3$ . Определяем токи ветвей через контурные токи:

$$I_1 = J_1; I_2 = J_2 - J_1; I_3 = J_2 + J_4; I_4 = J_3 - J_2; I_5 = J_1 - J_3; I_6 = -J_3 - J_4.$$

Составляем баланс мощностей:

$$E_1 I_1 + E_4 I_4 + E_5 I_5 + U_{24} J = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6.$$

Проверяем погрешность баланса:

$$\delta_p = \frac{|P_{уст} - P_n|}{\frac{P_{уст} + P_n}{2}} \cdot 100\% < 0,5\%.$$

### Метод узловых потенциалов

За неизвестные принимают потенциалы узлов схемы. После нахождения потенциалов узлов схемы токи ветвей определяют по закону Ома. Таким образом, метод узловых потенциалов основывается на использовании первого закона Кирхгофа и закона Ома.



Собственные проводимости входят в систему со знаком «+», а взаимные со знаком «-». Если между какими-нибудь двумя узлами нет ни одной ветви, то проводимость равна нулю. В матричной форме можно записать:  $G \cdot \varphi = J$ .

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & \cdots & -G_{1,n-1} \\ -G_{21} & G_{22} & -G_{23} & \cdots & -G_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -G_{n-1,1} & -G_{n-1,2} & -G_{n-1,3} & \cdots & G_{n-1,n-1} \end{bmatrix}; \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ \vdots \\ J_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

По правилу Крамера для потенциала  $k$ -го узла можно записать:

$$\varphi_k = \sum \Delta_{ik} J_{ii} = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} J_{11} + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} J_{22} + \cdots + \frac{\Delta_{n-1,n-1}}{\Delta} J_{n-1,n-1},$$

где  $\Delta = \det G$ ;  $\Delta_{km}$  - алгебраическое дополнение;  $\Delta_{km} = \Delta_{mk}$ .

Если схема содержит ветвь с идеальным источником напряжения (сопротивление ветви равно нулю), то за базисный узел принимают один из выводов источника. Потенциал узла, который связан с другим выводом источника, будет определяться величиной ЭДС источника (с учетом направления ЭДС). При этом количество неизвестных и уравнений сокращается на 1.

Если в схеме есть несколько ветвей, которые содержат идеальные источники напряжения ( $R = 0$ ,  $G \rightarrow \infty$ ), то эти ветви нужно рассматривать как источники неизвестных токов, которые потом исключаются при сложении соответствующих уравнений (если источник включен между узлами  $k$  и  $m$ , то эти уравнения суммируются). Дополнительными связями между неизвестными узловыми потенциалами будут известные ЭДС источников, которые включены между этими узлами.

Если схема имеет  $l$  ветвей и  $n$  узлов, то при  $(n - 1) < (l - n + 1)$  целесообразно применять метод узловых потенциалов; при  $(n - 1) > (l - n + 1)$  метод контурных токов.

**Пример.** Найти токи в цепи на рис.36.

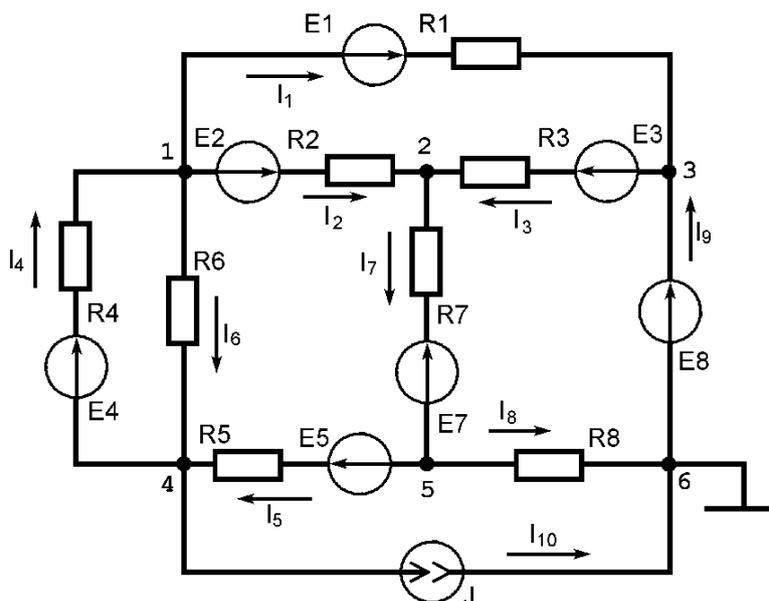


Рис.36

Принимаем  $\varphi_6 = 0$ , тогда  $\varphi_3 = E_8$ . Для третьего узла равенство составлять не надо. Запишем исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 - G_{13}\varphi_3 - G_{14}\varphi_4 - G_{15}\varphi_5 = J_{11} \\ -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 - G_{23}\varphi_3 - G_{24}\varphi_4 - G_{25}\varphi_5 = J_{22} \\ -G_{41}\varphi_1 + G_{42}\varphi_2 - G_{43}\varphi_3 + G_{44}\varphi_4 - G_{45}\varphi_5 = J_{44} \\ -G_{51}\varphi_1 - G_{52}\varphi_2 - G_{53}\varphi_3 - G_{54}\varphi_4 + G_{55}\varphi_5 = J_{55} \end{cases}$$

Находим собственные и взаимные проводимости узлов и задающие токи:

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}; & G_{12} &= G_{21} = \frac{1}{R_2}; & G_{13} &= \frac{1}{R_1}; & G_{14} &= G_{41} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}; \\ G_{15} &= G_{51} = 0; & G_{22} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_7}; & G_{23} &= \frac{1}{R_3}; & G_{24} &= G_{42} = 0; & G_{25} &= G_{52} = \frac{1}{R_7}; \\ G_{34} &= G_{43} = 0; & G_{44} &= \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}; & G_{45} &= G_{54} = \frac{1}{R_5}; & G_{55} &= \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8}; \\ J_{11} &= -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_4}{R_4}; & J_{22} &= \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} + \frac{E_7}{R_7}; & J_{44} &= -J - \frac{E_4}{R_4} + \frac{E_5}{R_5}; & J_{55} &= -\frac{E_5}{R_5} - \frac{E_7}{R_7}. \end{aligned}$$

Переносим третий столбец в правую часть уравнений и получаем систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Решив систему, находим потенциалы узлов  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$ . Найдем токи ветвей:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_1}{R_1}; & I_2 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_2}{R_2}; & I_3 &= \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_2}{R_3}; & I_4 &= \frac{\varphi_4 - \varphi_1 + E}{R_4}; \\ I_5 &= \frac{\varphi_5 - \varphi_4 + E_5}{R_5}; & I_6 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_6}; & I_7 &= \frac{\varphi_2 - \varphi_5 - E_7}{R_7}; & I_8 &= \frac{\varphi_5}{R_8}; & I_9 &= I_8 + J \end{aligned}$$

Составим баланс мощностей:

$$\begin{aligned} P_{\text{ист}} &= E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 + E_4 I_4 + E_5 I_5 - E_7 I_7 + E_8 I_9 + J U_{64}; \\ P_{\text{н}} &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 + I_7^2 R_7 + I_8^2 R_8; \\ \delta_p &\leq 0,5\%. \end{aligned}$$

### Метод узловых напряжений

Этот метод является модификацией метода узловых потенциалов. Неизвестные - узловые напряжения - разности потенциалов между соответствующим и базисным узлами, причем потенциал базисного узла уже не нулевой (может быть произвольным). Положительные направления узловых напряжений приняты от рассматриваемого узла к базисному.

Система уравнений имеет вид:



## Преобразования электрических схем

Расчет и исследование процессов в сложных электрических цепях можно значительно упростить путем преобразования исходной схемы к эквивалентной схеме, которая содержит меньшее число ветвей и узлов, а следовательно и уравнений, которые определяют ее электрическое состояние.

Во всех случаях замены заданных электрических схем эквивалентными, необходимо выполнять условия неизменности токов и напряжений в тех частях схемы, которые не связаны с преобразованиями.

*Если преобразуется часть электрической цепи, которая не содержит источников энергии, то обеспечивается неизменность энергии, которая потребляется. При наличии в преобразуемой схеме источников энергии, в общем случае, суммарные мощности источников и приемников энергии будут различными, что нужно обязательно учитывать.*

Одним из основных видов преобразования является преобразование схем со смешанным (последовательно - параллельным) соединением элементов.

### Последовательное соединение

На участке цепи  $a-b$  проходит ток  $I$  (рис.39).

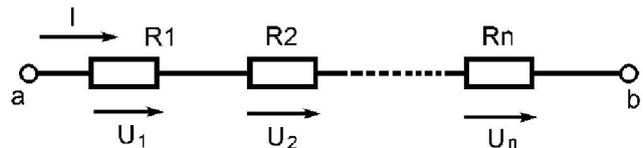


Рис.39

По второму закону Кирхгофа:

$$U_{ab} = U_1 + U_2 + \dots + U_n = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I = R_9 I,$$

где  $R_9 = \sum_i R_i$  - эквивалентное сопротивление при последовательном соединении элементов.

$U_i = U_{ab} R_i / R_9$  - напряжение на  $i$ -том сопротивлении.

*Делитель напряжения* (рис.40).

$$U_1 = \frac{U_{ab} R_1}{R_9}; \quad U_2 = \frac{U_{ab} R_2}{R_9}.$$

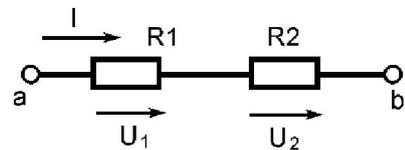


Рис.40

### Параллельное соединение (рис.41)

По первому закону Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \frac{U_{ab}}{R_1} + \frac{U_{ab}}{R_2} + \dots + \frac{U_{ab}}{R_n} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) U_{ab} = G_9 U_{ab}.$$

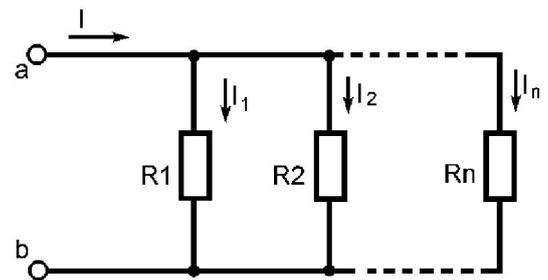


Рис.41

$$G_3 = \sum_{i=1}^n 1/R_i = \sum_{i=1}^n G_i; \quad G_i = \frac{1}{R_i}; \quad R_3 = 1/G_3.$$

Ток  $i$ -той ветви можно найти по формуле:  $I_i = I \cdot G_i / G_3 = I \cdot R_3 / R_i$ .

В отдельном случае для двух ветвей (рис.42) справедлива формула *делителя тока* (чужого плеча) :

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

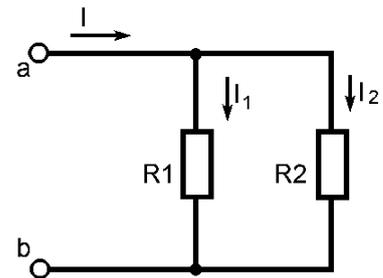


Рис.42

### Смешанное соединение

Электрические цепи со смешанным соединением элементов, могут быть преобразованы к более простым цепям путем замены последовательно и параллельно соединенных элементов их эквивалентными сопротивлениями.

**Пример** Найти токи в цепи со смешанным соединением элементов (рис.43,а).

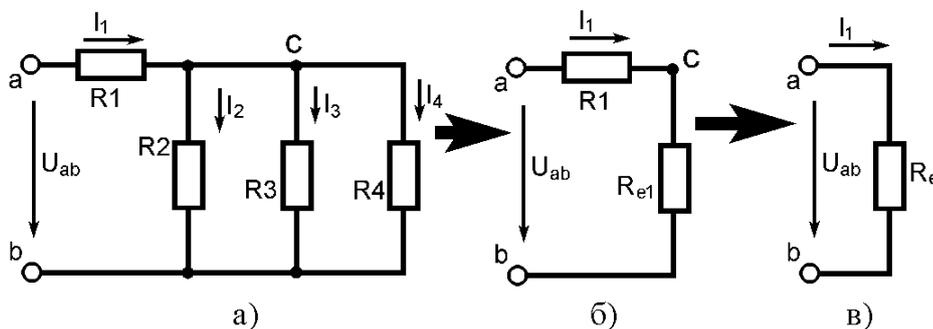


Рис.43

Заменяем параллельное соединение сопротивлений  $R_2 - R_4$  эквивалентным сопротивлением  $R_{e1}$ .  $G_{e1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ ;  $R_{e1} = 1/G_{e1}$ . В результате получаем

схему рис.43,б. Заменяем последовательное соединение сопротивлений эквивалентным  $R_e = R_1 + R_{e1}$  (рис.43,в). Находим токи :

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_e}; \quad U_{cb} = I_1 \cdot R_1; \quad I_2 = \frac{U_{cb}}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U_{cb}}{R_3}; \quad I_4 = \frac{U_{cb}}{R_4}.$$

### **Эквивалентные преобразования треугольника в звезду**

Эквивалентность треугольника и звезды понимается в том смысле, что при одинаковых напряжениях между одноименными выводами токи, которые втекают в эти выводы, будут равны. При этом будут одинаковыми и мощности в этих цепях.

Удобство этого преобразования иллюстрирует такой пример (рис.44).

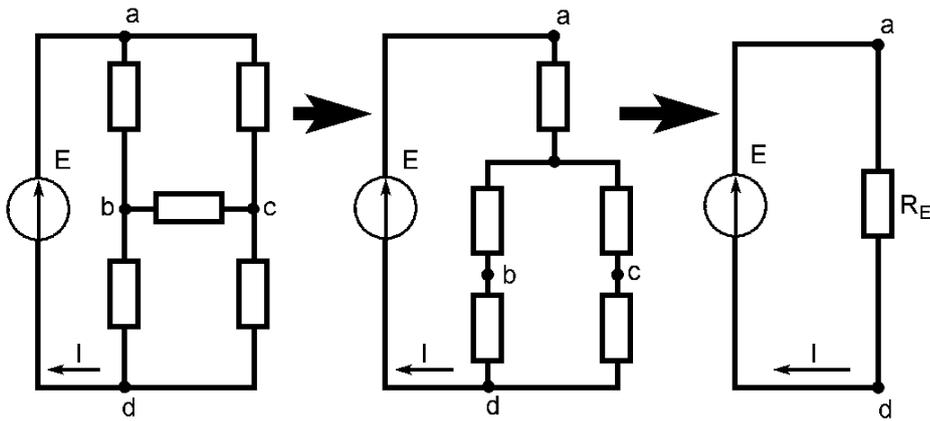


Рис.44

Рассмотрим соединение сопротивлений треугольником (рис.45). Обозначим токи в ветвях  $I_{12}$ ,  $I_{23}$ ,  $I_{31}$ . Выразим токи в ветвях треугольника через токи  $I_1 - I_3$ .

По второму закону Кирхгофа:

$$R_{12}I_{12} + R_{23}I_{23} + R_{31}I_{31} = 0. \quad (*)$$

По первому закону Кирхгофа для 1-го и 2-го узлов можно записать:

$$I_{31} = I_{12} - I_1; \quad I_{23} = I_{12} + I_2.$$

Подставим  $I_{31}$ ,  $I_{23}$  в выражение (\*) и решим относительно тока  $I_{12}$ :

$$I_{12} = \frac{R_{31}I_1 - R_{23}I_2}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Эквивалентная звезда показана на рис.46. Напряжение между выводами 1 и 2 треугольника:

$$U_{12} = R_{12}I_{12} = \frac{R_{12}R_{31}I_1 - R_{12}R_{23}I_2}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Напряжение между выводами 1 и 2 звезды:

$$U_{12} = R_1I_1 - R_2I_2.$$

Из условия эквивалентности преобразований необходимо обеспечить равенство напряжений  $U_{12}$  для любых токов  $I_1$  и  $I_2$ .

Тогда можно записать:

$$\frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_1 - \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_2 = R_1I_1 - R_2I_2.$$

Следовательно для сопротивлений звезды справедливыми будут такие соотношения:

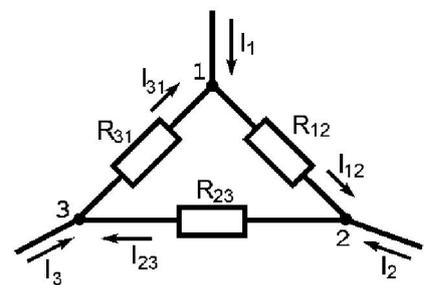


Рис.45

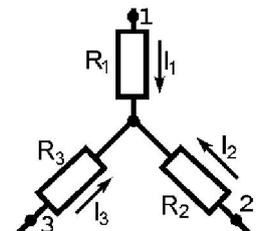


Рис.46

$$\begin{cases} R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \\ R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \\ R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \end{cases} \quad (**)$$

Третье выражение получено путем циклической перестановки индексов.

Правило: сопротивление луча звезды равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника разделенного на сумму сопротивлений трех сторон треугольника.

### Преобразования звезды в треугольник

Целесообразность такого преобразования проиллюстрирована на рис.47.

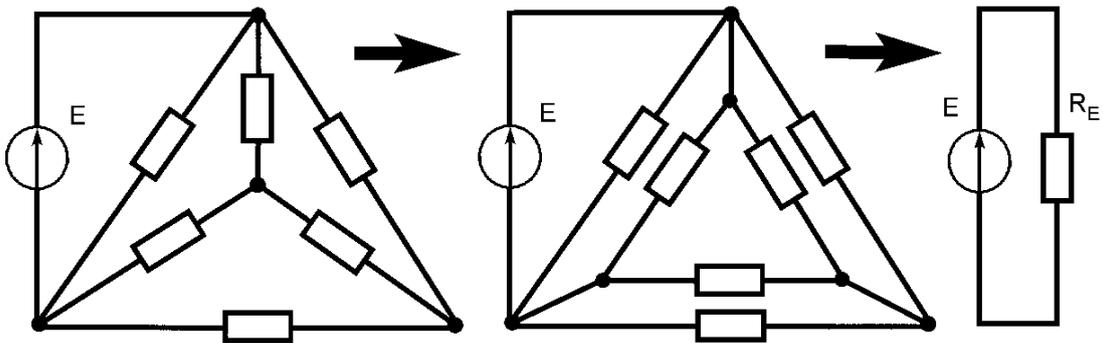


Рис.47

При переходе от звезды к треугольнику заданными являются сопротивления звезды  $R_1, R_2, R_3$ . Выражения для искомых сопротивлений треугольника находят в результате совместного решения уравнений (\*\*). Разделим третье уравнение на первое и на второе:

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_{23}}{R_{12}}; \quad \frac{R_3}{R_2} = \frac{R_{31}}{R_{12}} \quad \text{или} \quad R_{23} = \frac{R_3}{R_1} R_{12}; \quad R_{31} = \frac{R_3}{R_2} R_{12}.$$

Подставим  $R_{23}$  и  $R_{31}$  в первое уравнение (\*\*):

$$R_1 \left[ R_{12} + \frac{R_3}{R_1} R_{12} + \frac{R_3}{R_2} R_{12} \right] = \frac{R_3}{R_2} R_{12}^2 \quad \text{откуда} \quad R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}.$$

Аналогично циклической перестановкой индексов получим:

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}.$$

Правило: сопротивление стороны треугольника равно сумме сопротивлений прилегающих лучей звезды и их произведения, разделенного на сопротивление третьего луча.

Очевидно, что для проводимостей будут справедливы такие выражения:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

### Преобразования активных участков электрической цепи

Последовательное соединение источников ЭДС. (рис.48).



Рис.48

$$R_e = \sum_{i=1}^n R_i; \quad E_e = \sum_{i=1}^n E_i.$$

ЭДС входит в сумму со знаком «+», если направление совпадает с направлением эквивалентного источника  $E_e$ .

Параллельное соединение источников тока (рис.49).

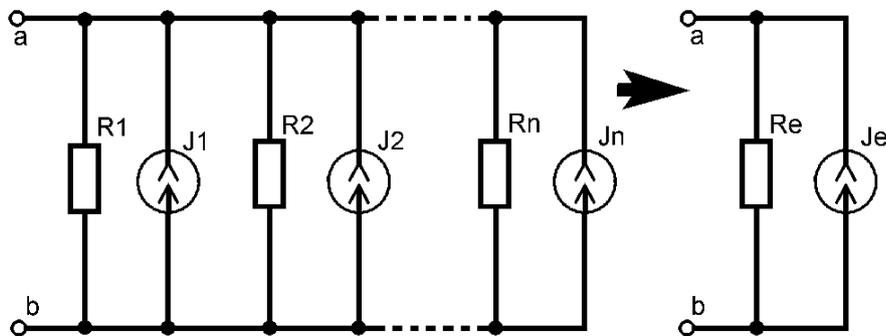


Рис.49

$$R_e = 1/G_e; \quad G_e = \sum_{i=1}^n G_i; \quad J_e = \sum_{k=1}^n J_k$$

$J_k$  входит в сумму со знаком «+», если его направление совпадает с направлением эквивалентного источника  $J_e$ .

Параллельное соединение источников ЭДС (рис.50, а)

Заменимо ветви с источниками ЭДС источниками тока (рис.50, б):

$$J_i = E_i / R_i.$$

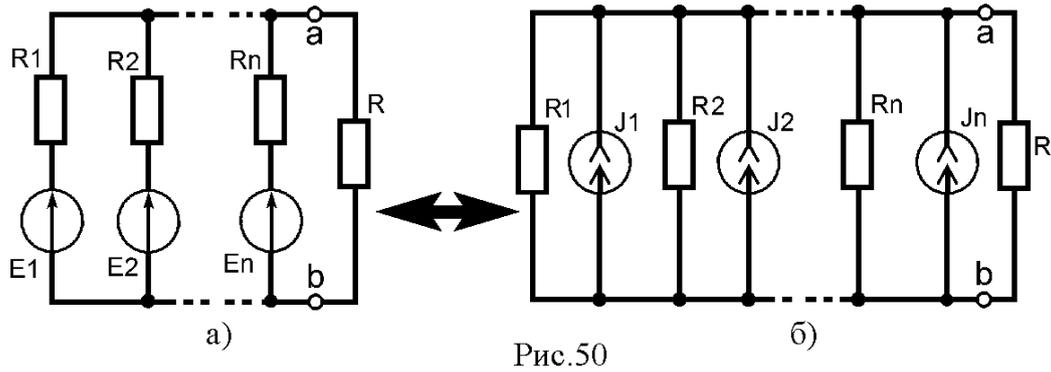


Рис.50

Тогда, аналогично предыдущему преобразованию, можно получить (рис.51):

$$R_e = 1/G_e; \quad G_e = \sum_i G_i; \quad J_e = \sum_i J_i;$$

$$E_e = J_e R_e; \quad E_e = \frac{\sum_k E_k G_k}{\sum_k G_k}$$

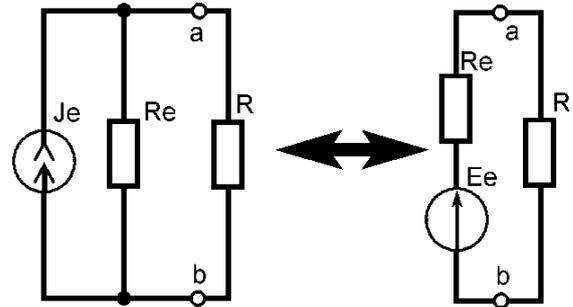


Рис.51

Если параллельном соединении ветвей с источниками ЭДС и тока, выражение для  $E_e$  принимает вид:

$$E_e = \frac{\sum_k E_k G_k + \sum_m J_m}{\sum_i G_i}.$$

В числителе алгебраические суммы. Знак «+», если направления источников  $E_k, J_k$  совпадают с направлением эквивалентного источника  $J_e$ .

Замечание: если одна из ветвей содержит идеальный источник ЭДС  $E_k$  ( $R_{вн} = 0$ ), тогда  $E_e = E_k$ .

Отметим, что исходная и преобразованная части цепи с источниками энергии эквивалентны только относительно непреобразованной части схемы, поскольку остаются неизменными  $U_{ab}$  и ток  $I$ , но они не эквивалентны в отношении отдаваемых мощностей. В эквивалентной схеме при отключении нагрузки  $R$  ток  $I = 0$  и потери энергии отсутствуют. В исходной схеме даже для  $I = 0$  в отдельных ветвях проходит ток и будет расходоваться энергия источников!

**Пример.** Рассчитать токи в цепи рис.52 методом эквивалентных преобразований.

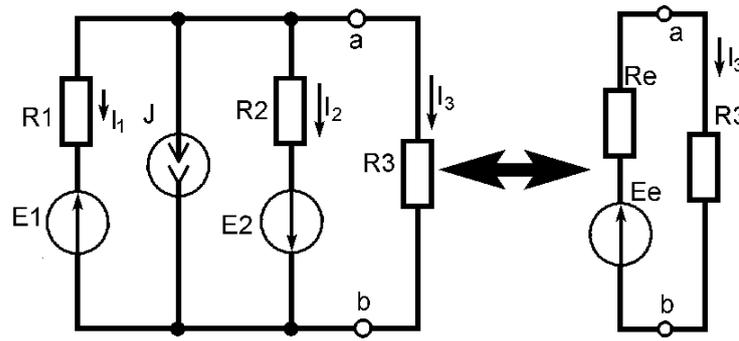


Рис.52

$$E_e = \frac{E_1/R_1 - E_2/R_2 - J}{1/R_1 + 1/R_2}; \quad G_e = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}; \quad R_e = \frac{1}{G_e} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$$

$$I_3 = \frac{E_e}{R_e + R_3}; \quad U_{ab} = R_3 I_3; \quad I_1 = \frac{U_{ab} - E_1}{R_1}; \quad I_2 = \frac{U_{ab} + E_2}{R_2}.$$

### Перенос источников в схеме

Расчет электрической цепи облегчается в ряде случаев при переносе источников ЭДС или тока. Как следует из уравнений Кирхгофа, токи в ветвях определяются величиной суммарных ЭДС в контурах независимо от того, из каких отдельных слагаемых они состоят. Таким образом, изменение размещения в схеме источников ЭДС, при котором суммарные ЭДС во всех контурах остаются неизменными, не влияет на токи в ветвях. Аналогично напряжения на ветвях определяются суммарными токами источников тока в узлах, а поэтому изменение расположения в схеме источников тока, при котором суммарные токи во всех узлах остаются неизменными, не влияет на напряжения на элементах цепи.

Источник ЭДС может быть перенесен из какой-нибудь ветви схемы за узел во все другие ветви, которые подсоединены к этому узлу. Причем, если в данной ветви источник ЭДС направлен к узлу, то в ветвях, в которые он переносится, он будет направлен от узла и наоборот (рис.53).

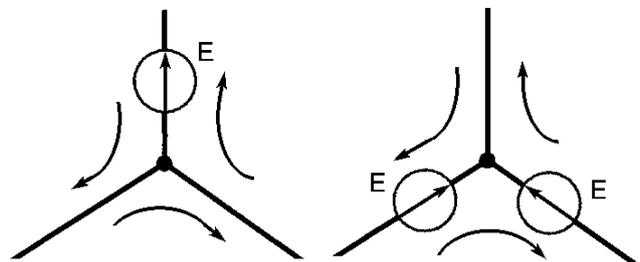


Рис.53

Если во всех ветвях, сходящихся к узлу, кроме одной, включены одинаковые источники ЭДС, совпадающие по направлению, то их можно заменить одним источником (рис.54).

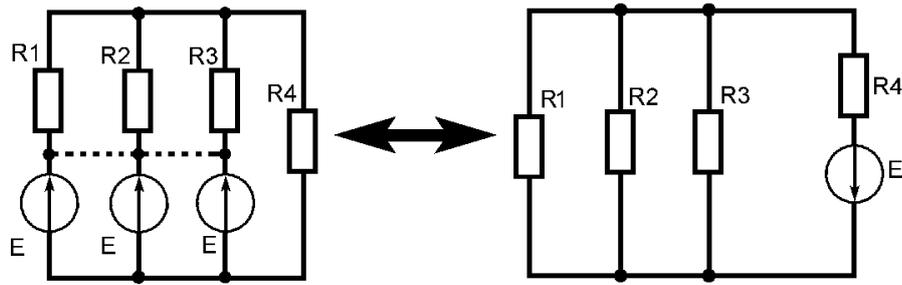


Рис.54

Источник тока может быть перенесен параллельно всем ветвям, которые составляли контур с этим источником тока (рис.55).

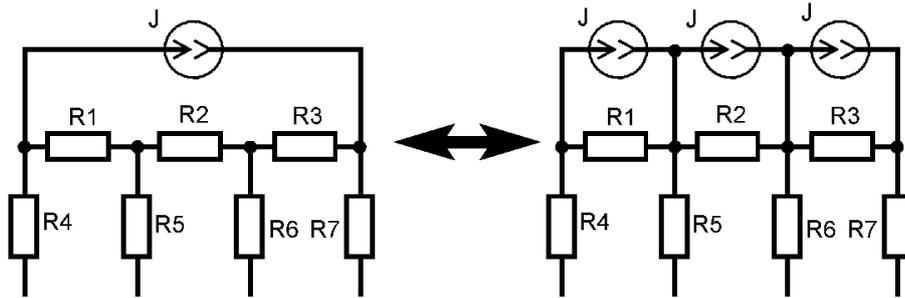


Рис.55

**Пример.** Рассмотрим схему с источником тока (рис.56, а). Разнесем источник тока по плечам мостовой схемы (рис.56, б). Заменим в полученной схеме источники тока источниками ЭДС. Далее проводим расчет методом двух узлов.

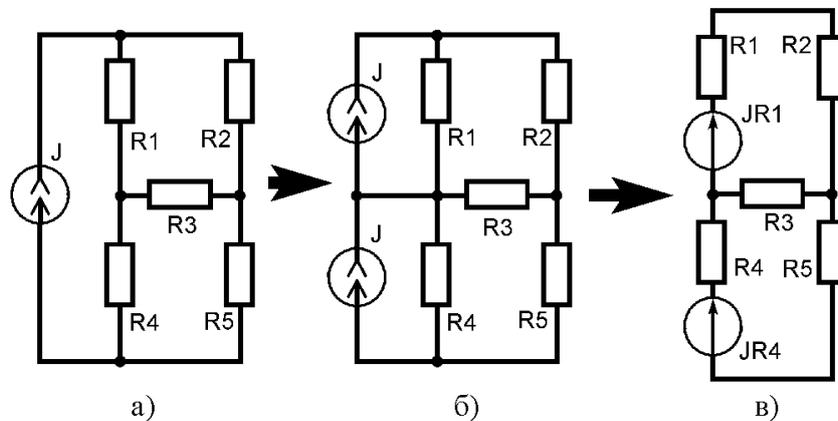


Рис.56

Самостоятельно: преобразовать активную звезду в активный треугольник и наоборот. (рис.57)

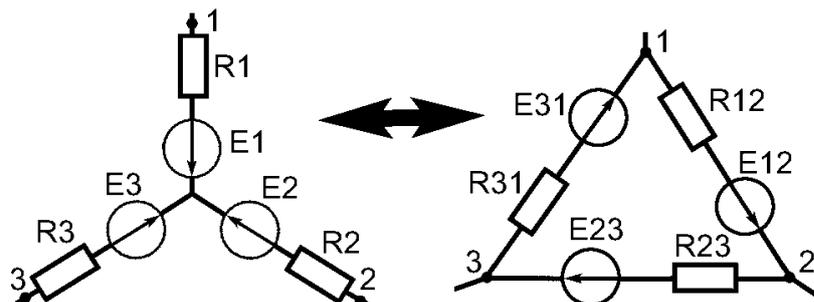


Рис.57

### Преобразования симметричных схем

Схема электрической цепи, у которой есть ось симметрии, называется **симметричной**. Такая схема показана на рис.58, а. Она симметрична относительно вертикальной оси. Ее можно изобразить в виде рис.58, б. В симметричных схемах легко выявить точки или узлы с одинаковыми потенциалами (симметрично расположенные относительно оси симметрии). В ветвях, которые соединены с такими узлами, токи равны нулю. Поэтому эти ветви можно разомкнуть, не нарушая при этом распределения токов и напряжений в цепи. Кроме того точки, которые имеют одинаковые потенциалы (эквипотенциальные точки) можно объединить. Это позволяет существенно упростить схему и облегчить расчеты рис.58, в.

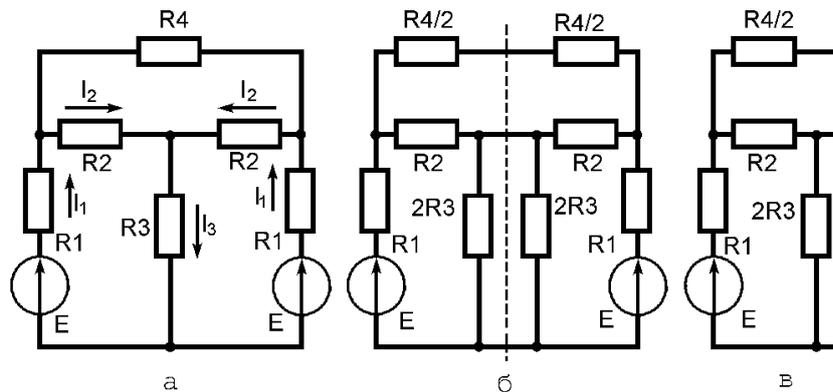


Рис.58

Если полярность источников в симметричной схеме противоположна (рис.59, а), то токи в симметричных ветвях (например  $I_1$  и  $I'_1$ ), а также напряжения между соответствующими парами узлов, симметрично расположенными относительно оси, будут равны по величине, но противоположны по знаку. Тогда напряжения между любыми двумя точками, которые лежат на оси симметрии, равно нулю (т.к.  $U = -U$ , а это возможно только для  $U = 0$ ). Поэтому все точки, расположенные на оси симметрии, могут быть замкнуты накоротко. Тогда расчетная схема будет иметь такой вид (рис.59, б, в).

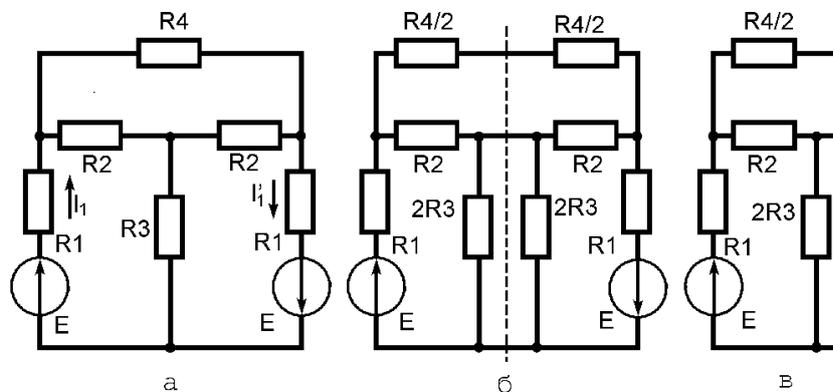


Рис.59

Рассмотрим симметричную мостовую схему (рис.60, а). Она имеет две оси симметрии: вертикальную и горизонтальную (рис.60, б). В продольных ветвях ток отсутствует. Потенциалы средних точек поперечных (перекрещенных)

ветвей равны. Продольные ветви можно разомкнуть, а средние точки поперечных ветвей объединить. В результате получим простую одноконтурную расчетную схему (рис,60, в).

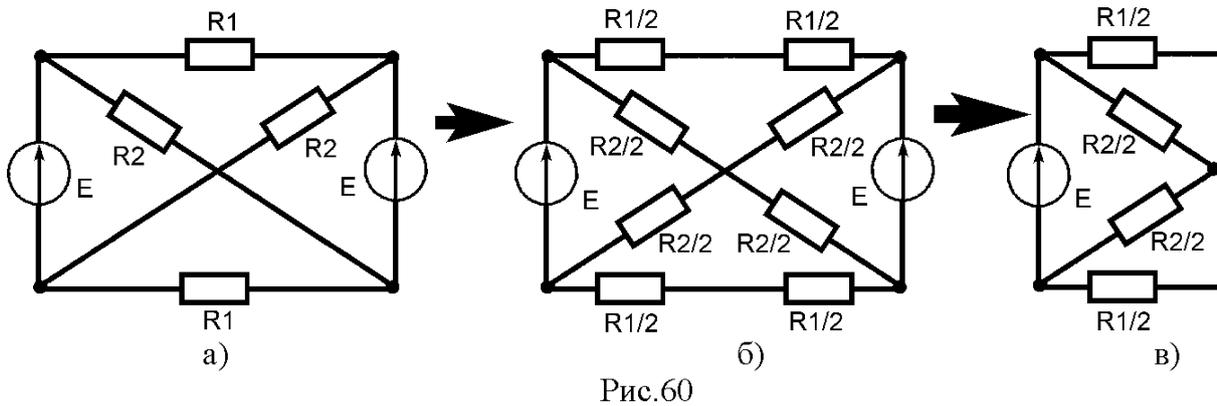


Рис.60

Если изменить полярность одного из источников на противоположную, то роли продольных и поперечных ветвей поменяются. Преобразованная часть схемы будет иметь вид, показанный на рис.61.

В приведенных примерах ЭДС источников были равны. В случае, когда ЭДС источников различны по величине, преобразования симметричных схем удобно объединять с методом наложения.

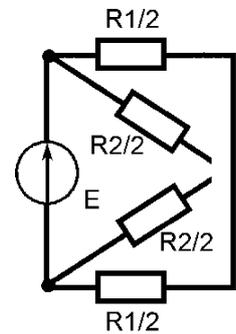


Рис.61

### Метод наложения

В линейной электрической цепи с источниками ЭДС контурные токи (а следовательно и токи ветвей) являются линейными функциями контурных ЭДС:

$$J_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^m \Delta_{ik} E_{ii}.$$

Физический смысл этой формулы состоит в том, что ток в любой ветви схемы может быть определен как алгебраическая сумма токов, которые вызываются в этой ветви каждой из ЭДС отдельно.

Для напряжений на ветвях схемы можно записать:

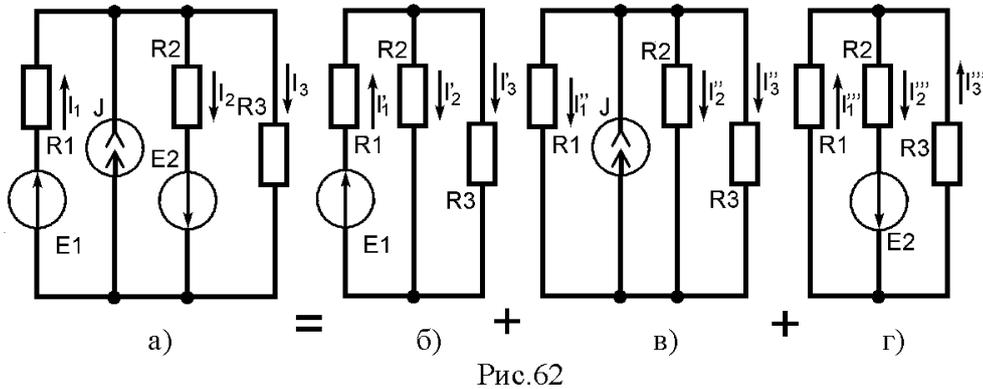
$$U_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_{ik} J_{ii}.$$

Физический смысл: узловое напряжение для любого узла линейной электрической цепи может быть получено как алгебраическая сумма напряжений, которые вызваны каждым из задающих источников тока отдельно.

Эти соотношения выражают **принцип наложения** (суперпозиции), который является одним из важнейших принципов линейных цепей. Именно на этом принципе основывается метод наложения.

Суть расчета цепи по принципу наложения состоит в следующем: по очереди рассчитывают частичные токи, которые обусловлены действием каждого источника ЭДС или тока отдельно, исключая из схемы все другие источники, но оставляя их внутренние сопротивления. При этом источники ЭДС закорачивают, а источники тока - размыкают. Затем находят токи ветвей путем алгебраического сложения частичных токов.

**Пример.** Рассчитать цепь рис.62, а.



Рассчитываем цепь для каждого источника отдельно (рис.62, б –г). Находим токи ветвей как алгебраическую сумму частичных токов:

$$I_1 = I'_1 - I''_1 + I'''_1 ; \quad I_2 = I'_2 + I''_2 + I'''_2 ; \quad I_3 = I'_3 + I''_3 - I'''_3 .$$

*Примечание.* Принцип наложения нельзя применять для расчета мощностей, т.к.  $I^2R = (I' + I'')^2 R \neq I'^2R + I''^2R$ .

### Метод эквивалентного генератора

(активного двухполюсника; эквивалентного источника; Тевенина; Нортон)

Введем понятие активного и пассивного двухполюсников. Часть электрической цепи произвольной конфигурации, которая рассматривается относительно двух полюсов (узлов), называется **двухполюсником**. Графическое обозначение двухполюсников изображено на рис.63.

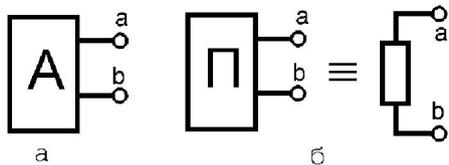


Рис.63

Двухполюсники, которые содержат источники электрической энергии, называют активными (рис.63,а), а двухполюсники без источников энергии - пассивными (рис.63, б).

Всякий пассивный двухполюсник является потребителем электрической энергии и характеризуется единственным параметром - входным или внутренним сопротивлением.

Активный двухполюсник можно изобразить как источник ЭДС  $E_e$  или

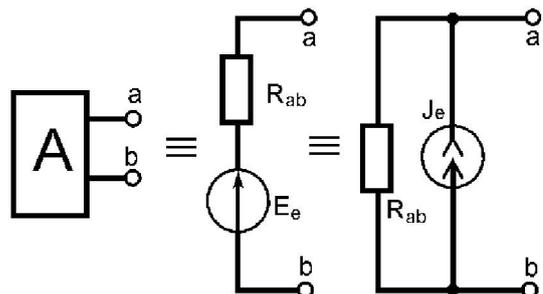


Рис.64

источник тока  $J_e$  с соответствующим внутренним сопротивлением  $R_{ab}$ , которое определяется относительно контактов  $a$  и  $b$  при закороченных источниках ЭДС и разомкнутых источниках тока (рис.64).

Т. Тевенина (эквивал. генератора): Ток в любой ветви  $a-b$  сколь угодно сложной схемы не изменится, если активный двухполюсник, к выводам которого подключена эта ветвь в точках  $a$  и  $b$ , заменить эквивалентным генератором, ЭДС которого равна напряжению холостого хода активного двухполюсника, а внутреннее сопротивление равно входному сопротивлению пассивного двухполюсника, которое получается из данного активного двухполюсника путем исключения действующих там источников энергии (при этом « $E$ » закорачивают, а « $J$ » размыкают).

Т. Нортона: Ток в любой ветви  $a-b$  не изменится, если электрическую цепь, к которой она подключена в узлах  $a-b$ , заменить источником тока. Ток источника равен току ветви  $a-b$  при коротком замыкании, а внутреннее сопротивление источника тока – входному сопротивлению пассивного двухполюсника относительно выводов  $a-b$ .

Докажем теорему об эквивалентном генераторе. Пусть задана некоторая схема и нужно найти ток в одной из ветвей (рис.65, а).

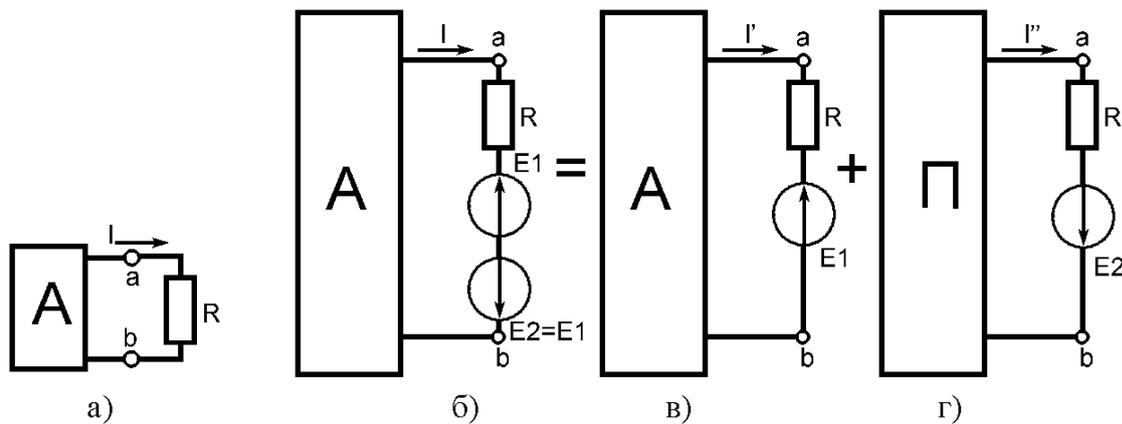


Рис.65

Ток  $I$  не изменится, если в ветви  $a-b$  включить два равных и встречно направленных источника  $E_1, E_2$  (рис.65, б). По принципу наложения ток  $I$  можно получить как сумму токов  $I'$  и  $I''$ . Ток  $I'$  обусловлен всеми источниками этого активного двухполюсника и источником  $E_1$  (рис.65, в), а ток  $I''$  только источником  $E_2$  (рис.65, г). По закону Ома ток  $I'$  равняется:

$$I' = \frac{U_{ab} - E_1}{R}.$$

Выберем  $E_1$  так, чтобы ток  $I'$  равнялся нулю. Отсутствие тока в ветви  $a-b$  эквивалентно ее размыканию (холостому ходу). Обозначим напряжение на выводах  $a-b$  для этого режима  $U_{ab\text{ хх}}$ . Таким образом  $E_1 = U_{ab\text{ хх}}$ .

При условии  $I' = 0 \Rightarrow I = I''$  ( $I = I' + I''$ ).

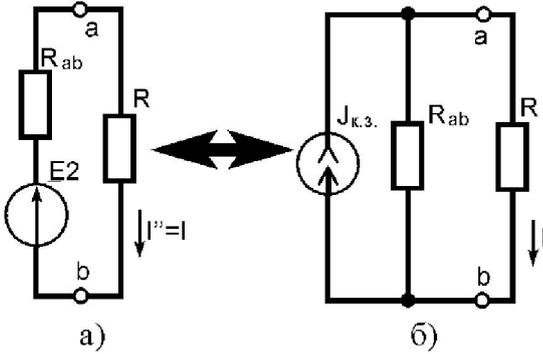


Рис.66

Заменяем пассивный двухполюсник его входным сопротивлением  $R_{ab}$  (рис.66, а). Тогда ток  $I$  можно найти по формуле:

$$I = \frac{E_2}{R_{ab} + R} = \frac{U_{abxx}}{R_{ab} + R}.$$

Очевидно, что легко можно перейти к схеме рис.66, б

$$J_{к.з.} = \frac{U_{abxx}}{R_{ab}}, (R=0) \text{ или } R_{ab} = \frac{U_{abxx}}{J_{к.з.}}$$

Отсюда вытекает простой метод опытного определения входного сопротивления пассивного двухполюсника. Нужно произвести опыты холостого хода и короткого замыкания и измерить  $U_{abxx}$  и  $J_{кз}$ .

Если ветвь  $a-b$  содержит, кроме сопротивления  $R$ , источник ЭДС « $E$ », то в ток ветви  $a-b$  будет равен:

$$I = \frac{U_{abxx} \pm E}{R_{ab} + R}$$

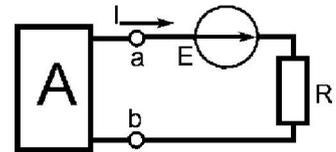


Рис.67

(знак «+» если ЭДС источника  $E$  и ток  $I$  совпадают по направлению).

**Пример.** Определить ток  $I_5$  в схеме рис.68, а.

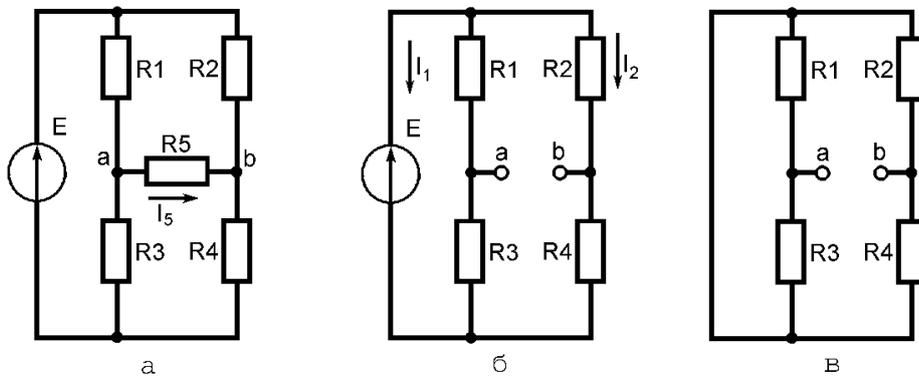


Рис.68

1. Размыкаем ветвь  $a-b$  и определяем напряжение  $U_{abxx}$  активного двухполюсника (рис.68, б):  $I_1 = \frac{E}{R_1 + R_3}; I_2 = \frac{E}{R_2 + R_4};$

$$U_{abx.x.} = I_1 R_3 - I_2 R_4 = I_2 R_2 - I_1 R_1 = \left( \frac{R_2}{R_2 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_3} \right) E = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \cdot E.$$

2. Определяем входное сопротивление пассивного двухполюсника относительно выводов  $a$  и  $b$ :

$$R_{ab} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}.$$

3. Определяем ток  $I_5$  по формуле: 
$$I_5 = \frac{U_{abxx}}{R_{ab} + R_5}.$$

Из выражения для  $U_{abxx}$  следует: если  $R_1R_4 = R_2R_3$ , то  $U_{abxx} = 0$  для произвольного источника  $E$ . При этом ток  $I_5$  также будет равняться нулю, а мост будет сбалансированным (уравновешенным).  $R_1R_4 = R_2R_3$  - условие равновесия (баланса) моста.

### Метод пропорционального перерасчета (пропорциональных величин; подобия; единичного тока)

Этот метод эффективен при расчете цепей с одним источником и смешанным соединением нагрузок. Рассмотрим применение этого метода на примере (рис.69).

В наиболее удаленной от источника  $E$  (входа цепи) ветви задаемся током равным 1А:  $I'_5 = 1A$ . Тогда по закону Ома  $U'_{42} = I'_5R_5$ . Зная  $U'_{42}$ , можем найти ток  $I'_4$ :

$$I'_4 = U'_{42}/R_4.$$

По первому закону Кирхгофа:

$$I'_3 = I'_4 + I'_5.$$

Находим напряжение  $U'_{32} = I'_3R_3 + U'_{42}$ . Аналогично определяем остальные напряжения и токи:  $I'_2 = U'_{32}/R_2$ ;  $I'_1 = I'_2 + I'_3$ ;  $U'_{12} = I'_1R_1 + U'_{32}$ .

В общем случае напряжение  $U'_{12}$ , найденное таким образом, не будет равняться ЭДС  $E$  (входному напряжению цепи). Определяем коэффициент перерасчета (пропорциональности):  $K = E/U'_{12}$ .

Умножив на этот коэффициент  $K$  найденные токи и напряжения, получим их реальные значения:  $I_1 = KI'_1$ ;  $I_2 = KI'_2$ ;  $U_{32} = KU'_{32}$  и т. д.

Этот метод в сочетании с методом наложения (суперпозиции) можно довольно эффективно применять для расчета сложных цепей.

### Выходные и взаимные проводимости и сопротивления ветвей

Выделим в некоторой схеме две ветви  $m$  и  $k$ . Выберем контуры таким образом, чтобы  $k$ -тая ветвь входила только в  $k$ -й контур, а  $m$ -тая ветвь - только в  $m$ -й контур. По методу контурных токов:

$$J_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^m \Delta_{ik} E_{ii} = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} E_{11} + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} E_{22} + \dots + \frac{\Delta_{mk}}{\Delta} E_{mm}.$$

Будем считать, что  $E_{mm} \neq 0$ , а все остальные источники отсутствуют. Тогда для контурных токов  $k$ -го и  $m$ -го контуров (они совпадают с токами соответствующих ветвей) будем иметь:

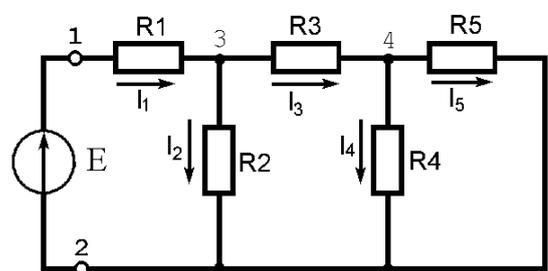


Рис.69

$$I_k = \frac{\Delta_{mk}}{\Delta} E_m; \quad I_m = \frac{\Delta_{mm}}{\Delta} E_m; \quad \parallel \quad E_{mm} = E_m,$$

где  $\Delta$  - определитель, а  $\Delta_{mm}$  - алгебраическое дополнение матрицы сопротивлений  $R$ . Коэффициенты перед ЭДС имеют размерность проводимости, т.е.:

$$g_{mk} = \frac{\Delta_{mk}}{\Delta}; \quad g_{mm} = \frac{\Delta_{mm}}{\Delta}.$$

Отношение тока ветви к ЭДС источника в этой ветви при отсутствии источников ЭДС в других ветвях называется **входной проводимостью ветви**:

$$g_{mm} = I_m / E_m = \Delta_{mm} / \Delta$$

Отношение тока одной ветви к ЭДС источника другой ветви при отсутствии источников ЭДС в остальных ветвях называется **взаимной (передаточной) проводимостью ветви**:  $g_{mk} = I_k / E_m = \Delta_{mk} / \Delta$ ;  $g_{mk} = g_{km}$ .

Величины обратные входным и взаимным (передаточным) проводимостям ветвей называются входными и взаимными (передаточными) сопротивлениями ветвей.

Входные и взаимные проводимости можно определить расчетным или опытным (экспериментальным) путем. Для расчетов используют метод контурных токов или метод наложения. При составлении уравнений по методу контурных токов необходимо следить за тем, чтобы ветви, для которых определяются входные и взаимные проводимости, входили в состав только «своих» контуров.

**Пример.** Для схемы рис.70, а определить входные и взаимные проводимости ветвей.

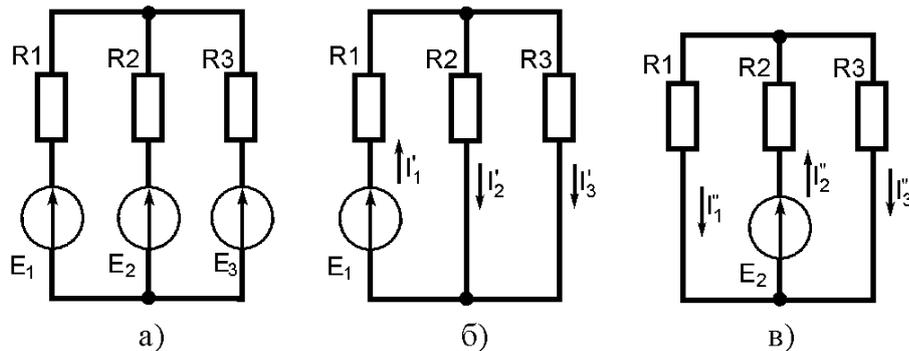


Рис.70

Применим метод наложения. Рассмотрим схему в которой действует только источник  $E_1$  (рис.70, б). Для этой схемы находим токи во всех ветвях:

$$I'_1 = E_1 / \left( R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right) = \frac{E_1 (R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{E_1 (R_2 + R_3)}{R};$$

$$I'_2 = I'_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3}; \quad I'_3 = I'_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}.$$

Тогда будем иметь:  $g_{11} = \frac{I'_1}{E_1} = \frac{R_2 + R_3}{R}$ ;  $g_{12} = \frac{I'_2}{E_1} = \frac{R_3}{R}$ ;  $g_{13} = \frac{I'_3}{E_1} = \frac{R_2}{R}$ .

Для схемы, в которой действует только источник  $E_2$  (рис.70, в), находим:

$$g_{11} = \frac{I'_1}{E_1} = \frac{R_2 + R_3}{R}; \quad g_{12} = \frac{I'_2}{E_1} = \frac{R_3}{R}; \quad g_{13} = \frac{I'_3}{E_1} = \frac{R_2}{R}.$$

### Принцип взаимности (обратимости)

**Теорема** : Для любой пассивной линейной цепи ток  $I_m$  в  $m$ -той ветви, который вызвал источник ЭДС  $E_k$   $k$ -той ветви, будет равняться току  $I_k$   $k$ -той ветви, который вызвал источник ЭДС  $E_m$   $m$ -той ветви при условии  $E_k = E_m$ .

Рассмотрим схемы на рис.71.

По методу контурных токов:

$$I_m = \frac{\Delta_{km}}{\Delta} E_k; \quad I'_k = \frac{\Delta_{mk}}{\Delta} E_m.$$

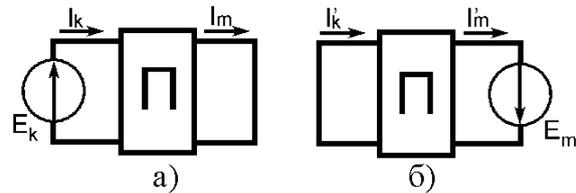


Рис.71

$E_k = E_m$  по условию;

$\Delta_{km} = \Delta_{mk}$  (симметричность матрицы сопротивления  $R$ ).

Тогда  $I_m = I'_k$ , что и требовалось доказать.

При практическом применении этой теоремы важно иметь в виду взаимное соответствие направлений токов и ЭДС источников.

Цепи, для которых выполняется принцип взаимности называются **обратимыми**, а если не выполняется - **необратимыми** (например, нелинейные цепи).

### Принцип компенсации

**Теорема**: Токи во всех ветвях электрической цепи не изменятся, если любой участок электрической цепи заменить источником ЭДС, величина которого равна напряжению на этом участке, а направление встречно этому напряжению (рис.72).

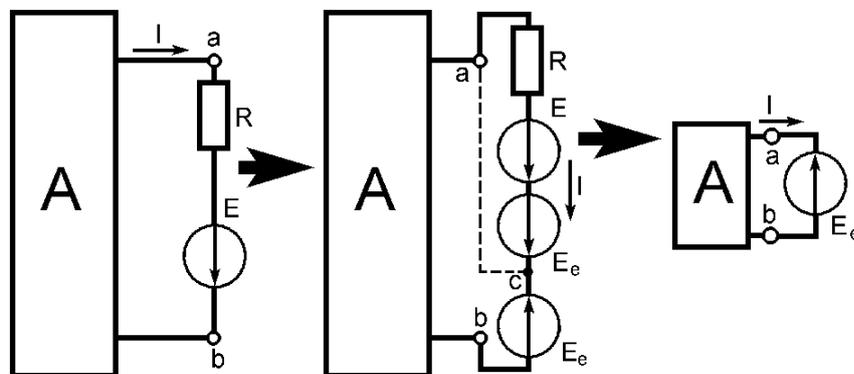


Рис.72

$$U_{ab} = RI - E = E_e; \quad \varphi_c = \varphi_a - RI + E + E_e = \varphi_a - RI + E + RI - E = \varphi_a.$$

Таким образом,  $\varphi_a = \varphi_c$ , а следовательно эти точки можно объединить (эквипотенциальные точки) и тогда будем иметь окончательную схему.

**Теорема:** Токи во всех ветвях электрической цепи не изменятся, если любую ветвь этой цепи заменить источником тока, величина тока которого равна току данной ветви, а направление совпадает с направлением тока ветви (рис.73).

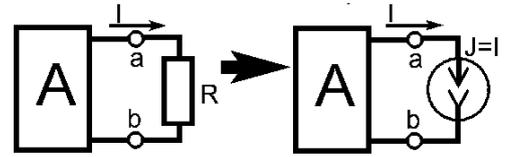


Рис.73

**Замечание.** Следует отметить, что ЭДС или ток источника, который заменяет участок цепи, зависит от тока этого участка цепи. При изменении параметров других элементов цепи ток этого участка в общем случае изменяется, а поэтому указанный источник является зависимым (управляемым) источником ЭДС или тока. Этим он принципиально отличается от источников, которые рассматривались раньше.

### Линейные соотношения между напряжениями и токами в электрических цепях

**Принцип линейности:** все токи и напряжения в электрической цепи изменяются пропорционально друг другу.

Согласно методу контурных токов общее выражение для тока  $k$ -той ветви:

$$I_k = g_{1k}E_1 + g_{2k}E_2 + \dots + g_{kk}E_k + \dots + g_{mk}E_m.$$

Если в схеме изменяется ЭДС только одного источника, например  $E_m$ , то все слагаемые в этом выражении, кроме  $g_{mk}$  и  $E_m$ , постоянные. Обозначим их через  $A_k$ . Тогда:  $I_k = A_k + g_{mk}E_m$ .

Аналогично для тока  $l$ -ой ветви:  $I_l = A_l + g_{ml}E_m$ . Из последнего соотношения найдем  $E_m$ :  $E_m = \frac{I_l - A_l}{g_{ml}}$  и подставим в выражение для тока  $I_k$ :

$$I_k = A_k + g_{mk} \frac{I_l - A_l}{g_{ml}} = a_k + b_k I_l, \text{ где } a_k = A_k - A_l \frac{g_{mk}}{g_{ml}}; \quad b_k = \frac{g_{mk}}{g_{ml}}.$$

Коэффициенты  $a_k$ ,  $b_k$  могут быть как больше, так и меньше нуля. В частном случае  $a_k$  или  $b_k$  могут равняться нулю. Из теоремы компенсации известно, что любое сопротивление (участок цепи) может быть заменен соответствующим источником ЭДС. Таким образом, линейные соотношения между любыми двумя токами будут иметь место и при изменении сопротивления  $m$ -той ветви. Умножим выражение для  $I_k$  на сопротивление  $R_k$ :

$$\begin{aligned} I_k R_k = U_k &= A_k R_k + g_{mk} R_k E_m = A_k R_k + g_{mk} R_k \frac{I_l - A_l}{g_{ml}} = \\ &= A_k R_k - \frac{g_{mk}}{g_{ml}} R_k A_l + \frac{g_{mk}}{g_{ml}} R_k I_l = c_k + d_k I_l. \end{aligned}$$

Таким образом, напряжение  $k$ -той ветви линейно связано с током  $i$ -той ветви. Аналогично можно получить соотношения:

$$U_k = f_k + h_k U_l; \quad I_k = s_k + t_k U_l .$$

Неизвестные коэффициенты в линейных соотношениях можно определить расчетным или опытным путем. Для этого, как правило, рассматривают режимы холостого хода и короткого замыкания.

Пусть  $I_k = a_k + b_k I_l$ .

1. Режим холостого хода :  $I_l = 0 \rightarrow I_k = a_k$ .

2. Режим короткого замыкания:  $I_l = I_{l \text{ кз}} \rightarrow I_k = a_k + b_k I_{l \text{ кз}} = I_{k \text{ хол}} + b_k I_{l \text{ кз}}$ .

Тогда  $b_k = (I_{k \text{ кз}} - I_{k \text{ хол}}) / I_{l \text{ кз}}$ .

### Теорема вариаций

(изменения токов ветвей, вызванных приращением сопротивления одной из ветвей)

Пусть в цепи рис.74, а изменилось сопротивление  $m$ -той ветви  $R_m$ .

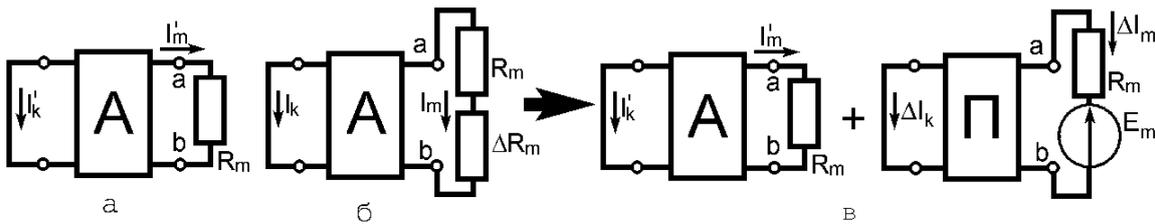


рис.74

Токи в ветвях  $k$  и  $m$  после изменения сопротивления (рис.74, б):

$$I_k = I_k' + \Delta I_k; \quad I_m = I_m' + \Delta I_m .$$

Нужно определить  $\Delta I_m, \Delta I_k$ . По принципу компенсации заменяем сопротивление  $R_m$  соответствующим источником ЭДС  $E_m$  ( $E_m = \Delta R_m I_m$ ) и применяем метод наложения (рис.74, в). Для тока  $\Delta I_m$  можно записать (с учетом направлений тока  $\Delta I_m$  и ЭДС  $E_m$ ):

$$\Delta I_m = -g_{mm} E_m = -g_{mm} \Delta R_m I_m = -g_{mm} \Delta R_m (I_m' + \Delta I_m)$$

откуда

$$\Delta I_m = -\frac{g_{mm} \Delta R_m}{1 + \Delta R_m g_{mm}} I_m'$$

где  $I_m'$  - ток  $m$ -той ветви до изменения сопротивления;  $g_{mm}$  - входная проводимость  $m$ -той ветви.

Приращение тока  $k$ -той ветви:

$$\Delta I_k = g_{mk} E_m = g_{mk} \Delta R_m (I_m' + \Delta I_m) = g_{mk} \Delta R_m \left( I_m' - \frac{g_{mm} \Delta R_m}{1 + \Delta R_m g_{mm}} I_m' \right) = \frac{g_{mk} \Delta R_m}{1 + \Delta R_m g_{mk}} I_m'$$

где  $g_{mk}$  - взаимная (передаточная) проводимость.

Проводимости  $g_{mm}$ ,  $g_{mk}$  равны соответствующим проводимостям ветвей в исходной схеме, потому что расчетная схема с пассивным двухполюсником отличается от исходной схемы только тем, что из нее исключили источники энергии.

### Передача энергии от активного двухполюсника к нагрузке (согласование нагрузки с источником)

При подключении нагрузки  $R$  к активному двухполюснику в цепи появляется ток  $I$ , а в нагрузку будет поступать мощность  $P = RI^2$  (рис.75). По методу эквивалентного генератора:  $I = \frac{U_{ab \text{ х.х.}}}{R + R_{ab}}$ , где  $U_{ab \text{ х.х.}}$  - напряжение холостого хода;  $R_{ab}$  - входное сопротивление активного двухполюсника.

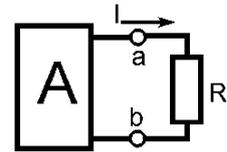


Рис.75

Тогда для мощности, которая поступает в нагрузку, можно записать:

$$P = \frac{RU_{ab \text{ х.х.}}^2}{(R + R_{ab})^2}.$$

Определим, каким должно быть соотношение между сопротивлением нагрузки  $R$  и входным сопротивлением активного двухполюсника  $R_{ab}$  для того, чтобы в нагрузку поступала наибольшая мощность. Исследуем зависимость  $P(R)$  на максимум:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{U_{ab \text{ х.х.}}^2 (R + R_{ab})^2 - 2R(R + R_{ab})U_{ab \text{ х.х.}}^2}{(R + R_{ab})^4} = \frac{U_{ab \text{ х.х.}}^2 (R_{ab}^2 - R^2)}{(R + R_{ab})^4}.$$

Из условия  $\frac{dP}{dR} = 0$  находим  $R = R_{ab}$ . Это точка максимуму, т.к. для  $R > R_{ab}$   $dP/dR < 0$ , а для  $R < R_{ab}$   $dP/dR > 0$ . Максимальная мощность передаваемая в нагрузку будет равна (при условии  $R = R_{ab}$ ):  $P_{\max} = \frac{U_{ab \text{ х.х.}}^2}{4R}$ .

Мощность, отдаваемая источником :

$$P_{\text{ист}} = U_{ab \text{ х.х.}} \cdot I = U_{ab \text{ х.х.}}^2 / (R + R_{ab}).$$

Коэффициент полезного действия такой системы будет равен:

$$\eta = P_n / P_{\text{ист}} = R / (R + R_{ab}).$$

При  $R = R_{ab}$  коэффициент полезного действия составит  $\eta = 0,5$ .

При больших мощностях работать с таким низким КПД недопустимо. При небольших мощностях источника (мВт÷Вт) допускается использовать систему с таким КПД для передачи в нагрузку максимальной мощности. Режим, при котором  $R = R_{ab}$ , называется *согласованием источника с нагрузкой*.

## Содержание

<i>Учебная программа</i> .....	<b>3</b>
<i>Предмет и содержание курса «Теория электрических цепей»</i> .....	<b>7</b>
<i>Электрическая цепь и её элементы: сопротивление, индуктивность, емкость; источники ЭДС и тока и их характеристики</i> .....	<b>10</b>
<i>Замещение физических устройств идеальными элементами цепи</i> .....	<b>15</b>
<i>Основные определения в электрических схемах</i> .....	<b>18</b>
<i>Закон Ома для участка цепи что содержит ЭДС</i> .....	<b>19</b>
<i>Потенциальная диаграмма</i> .....	<b>20</b>
<i>Баланс мощностей в электрических цепях</i> .....	<b>21</b>
<i>Законы Кирхгофа и их применения для расчета разветвленных цепей</i> .....	<b>22</b>
<i>Метод контурных токов</i> .....	<b>24</b>
<i>Метод узловых потенциалов</i> .....	<b>27</b>
<i>Метод узловых напряжений</i> .....	<b>30</b>
<i>Метод двух узлов</i> .....	<b>31</b>
<i>Преобразования электрических схем</i> .....	<b>32</b>
<i>Эквивалентные преобразования треугольника в звезду</i> .....	<b>33</b>
<i>Преобразование звезды в треугольник</i> .....	<b>35</b>
<i>Преобразование активных участков электрических цепей</i> .....	<b>36</b>
<i>Преобразование симметричных схем</i> .....	<b>40</b>
<i>Метод наложения</i> .....	<b>41</b>
<i>Метод эквивалентного генератора</i> .....	<b>42</b>
<i>Метод пропорционального перерасчета</i> .....	<b>45</b>
<i>Выходные и взаимные проводимости и сопротивления ветвей</i> ...	<b>45</b>
<i>Принцип взаимности (обратимости)</i> .....	<b>47</b>
<i>Принцип компенсации</i> .....	<b>47</b>
<i>Линейные соотношения между напряжениями и токами в электрических цепях</i> .....	<b>48</b>
<i>Теорема вариаций</i> .....	<b>49</b>
<i>Передача энергии от активного двухполюсника в нагрузку</i> .....	<b>50</b>

